Prøve i	FO929A - Matematikk
Dato:	3. desember 2012
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	5 (20 deloppgaver)
Antall sider:	2
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

Løsningsforslag

Oppgave 1 I denne oppgaven skal dere løse likninger og ulikheter. Alle svarene skal gis eksakt.

a) Løs den lineære likningen

$$7(x + 1/2) - 5 = 5/6.$$

LF: Vi ganger ut parantesen og flytter konstantledd over på høyre side av likhetstegnet

$$7x = 5/6 + 5 - 7/2 = 5/6 + 3/2 = 14/6 = 7/3.$$

Løsningen er $\underline{x = 1/3}$.

b) Finn alle x slik at

$$6x + \frac{1}{x} = 5.$$

LF: Variabelen x må være ulik 0. Likningen er derfor ekvivalent til likningen vi får ved å gange begge sider med x

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Løsningene til andregradslikningen er

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5^2 - 4 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}.$$

Løsningene er $\underline{x = 1/2 \text{ og } x = 1/3}$.

c) Finn alle løsningene til likningen

$$2\cos v = -\sqrt{3}$$

slik at $-\pi < v < \pi$.

LF: Løsningene er $\underline{v = -5\pi/6 \text{ og } v = 5\pi/6}$.

d) Finn alle x slik at

$$\sqrt{5x+1} = x.$$

LF: Dette er en irrasjonal likning. Vi kvadrerer begge sider og får en kvadratisk likning

$$5x + 1 = x^2.$$

Løsningene til den opprinnelige likningen er også løsninger til denne kvadratiske likningen. Ved kvadratformelen er røttene

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

Roten $(5 - \sqrt{29})/2$ er negativ og derfor ikke en løsning til likningen (kvadratratrøtter er ikke-negative). Roten $(5 + \sqrt{29})/2$ er en løsning til likningen. Vi konkluderer med at den irrasjonale likningen har en løsning og den er $\underline{(5 + \sqrt{29})/2}$.

e) Finn alle løsningene til ulikheten

$$\cos^2(v) \geq 1/2$$

slik at $0 \leq v \leq 360°$.

LF: Vi har at $\cos^2(v) = 1/2$ hvis og bare hvis $\cos(v) = \pm 1/\sqrt{2}$. Dette har løsningene $45°, 135°, 225°$ og $315°$ i intervallen $0 \leq v \leq 360°$. Ulikheten er ekvivalent til $\cos(v) \geq 1/\sqrt{2}$ eller $\cos(v) \leq -1/\sqrt{2}$. Fra enhetssirkelen ser vi at $\cos^2(v) \geq 1/2$ har løsningen

$$\underline{[0, 45°] \cup [135°, 225°] \cup [315°, 360°]},$$

f) Finn alle x slik at følgende ulikhet er gyldig

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - x} + 1 \leq 0.$$

LF: Uttrykket er ikke definernt når nevneren er lik 0. Nevneren er lik 0 når $x = 0$ eller $x = 1$. Vi finner felles nevner og legger sammen de rasjonale uttrykkene

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - x} + \frac{x^2 - x}{x^2 - x} = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x^2 - x} \leq 0.$$

Polynomet $2x^2 + 4x + 4 = 2(x^2 + 2x + 2) = 2((x+1)^2 + 1)$ er alltid positivt. Fortegnet til det rasjonale uttrykket er derfor det samme som fortegnet til $x^2 - x = x(x-1)$. Dette er negativt for $0 < x < 1$. Løsningsmengden er derfor $\underline{(0,1)}$.

g) Faktoriser polynomet $p(x) = x^3 - 2x + 1$ fullstendig.

LF: Vi ser at $x = 1$ er en rot. Derfor er $x - 1$ en faktor i polynomet. Vi utfører polynomdivisjon og finner at $x^3 - 2x + 1 = (x^2 + x - 1)(x - 1)$. Polynomet $(x^2 + x - 1)$ har røttene $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vi har derfor faktoriseringen

$$x^3 - 2x + 1 = \underline{(x-1)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

h) Emma og Lars har tilsammen 1243 kroner. Emma har 669 kr mer enn Lars. Hvor mye penger har Emma?

LF: La E betegne pengemengden til Emma og la L betegne pengemengden til Lars. Opplysningene i oppgaven kan da formuleres som likningene $E + L = 1243$ og $E - L = 669$. Legger vi sammen likningene får vi $2E = 1243 + 669 = 1912$. Dette gir at $E = 1912/2 = 956$. Emma har derfor <u>956 kroner</u>.

Oppgave 2 Vi har fire punkt i rommet: $A(-2,3,4)$, $B(3,7,2)$, $C(5,-4,-3)$ og $D(3,0,5)$. Svaret på følgende oppgaver skal gis eksakt.

a) Finn vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ og lengden til disse vektorene.

LF: På koordinatform er vektorene $\overrightarrow{AB} = \underline{[5,4,-2]}$ og $\overrightarrow{AC} = \underline{[7,-7,-7]}$. Lengden til vektorene er $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 16 + 4} = \underline{3\sqrt{5}}$ og $|\overrightarrow{AC}| = \underline{7\sqrt{3}}$.

b) Finn en likning som beskriver planet som inneholder trekanten ABC.

LF: Kryssproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ er en vektor som står normalt på de to ikke-parallelle vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Kryssproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ er lik

$$21[2,-1,3].$$

Vi velger normalvektoren $[2,-1,3]$. En likning for planet som inneholder trekanten ABC er på formen $2x - y + 3z + c = 0$ for en konstant c. Siden punktet A skal ligge i planet, finner vi c ved å sette inn for koordinatene til A, $2(-2) - 1(3) + 3(4) + c = 5 + c = 0$. En likning for planet er

$$\underline{2x - y + 3z - 5 = 0}.$$

c) Finn arealet til trekanten ABC.

LF: Arealet er halvparten av absoluttverdien til kryssproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Arealet er $21\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}/2 = \underline{21\sqrt{14}/2}$

d) Finn volumet til pyramiden $ABCD$ og finn korteste avstand fra punktet D til planet som inneholder trekanten ABC.

LF: Volumet til pyramiden er en sjettedel av absoluttverdien til trippelproduktet av $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$. Vektoren $\overrightarrow{AD}$ har koordinater $[5, -3, 1]$. Vi benytter utregningen av kryssproduktet i deloppgave b)

$$|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD}|/6 = 21[2, -1, 3] \bullet [5, -3, 1]/6 = 21 \cdot 16/6 = 7 \cdot 8 = 56.$$

Volumet er lik $\underline{56}$.

Volumet er lik arealet til grunnflaten ganget med høyden og delt på tre. Derfor er høyden lik tre ganger volumet delt på arealet til grunnflaten. Høyden er

$$3 \cdot 56/(21\sqrt{14}/2) = \underline{16/\sqrt{14}}.$$

Oppgave 3

a) En trekant ABD har egenskapene at $\angle DAB = 60°$ og side AB har lengde 5 cm og side AD har lengde 8 cm. Finn lengden til siden BD og vinkel $\angle ABD$. Finn arealet til trekanten.

LF: Fra kosinussetningen er kvadratet av lengden BD, i centimeter, gitt ved

$$5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(60°) = 25 + 64 - 40 = 49$$

Derfor er <u>lengden på siden BC lik 7 cm</u>.

Vi kan bruke både sinus og cosinussetningen for å finne vinkel $\angle ABD$. Hvis vi bruker sinussettningen får vi at $\sin(\angle ABD) = 8 \cdot \sin(\angle A)/7 = 0.98974\ldots$. Dette gir $\underline{\angle ABD = 81.78°}$.

Arealet til trekanten ABD er lik halvparten av produktet av lengden på sidene AB og AD samt $\sin(\angle A)$. Arealet er

$$5 \cdot 8 \cdot \sin(60°)/2 \text{ cm}^2 = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

b) Trekanten utvides til en firkant $ABCD$ slik at vinkelen $\angle ABC$ er $150°$ og BC har lengde 4 cm. Finn arealet til firkanten.

LF: Vinkelen $\angle DBC$ er lik $150° - 81.78° = 68.21°$. Arealet til trekanten DBC er lik halvparten av produktet av lengden på sidene BD og BC samt $\sin(\angle DBC)$. Det er

$$7 \cdot 4 \cdot \sin(68.21°)/2 \text{ cm}^2 = 13.0 \text{ cm}^2$$

Arealet til firkanten er summen av arealet til de to trekantene ABD og DBC. Arealet til firkanten $ABCD$ er lik $\underline{30.3 \text{ cm}^2}$.

Oppgave 4

a) Rekken

$$2 + 4/3 + 8/9 + 16/27 + \cdots + 128/729$$

er en geometrisk rekke. Hva er kvotienten til rekken? Bestem summen av rekken.

LF: Kvotienten er lik $(4/3)/2 = 2/3$. Vi ser at $729 = 81 \cdot 9 = 3^6$. Det er derfor 7 ledd i rekken.

$$2\left(\sum_{i=0}^{6}(2/3)^i\right) = 2\frac{1-(2/3)^7}{1-2/3} = \underline{\frac{4118}{729}}.$$

b) Finn summen av alle oddetall mellom 121 og 361.

LF: Eg tolker oppgaven slik at tallene 121 og 361 skal inkluderes. Det er 121 oddetall fra og med 121 til og med 361. Summen blir da $121(121+361)/2 = \underline{29161}$.

(Alternativt. Summen av de n første naturlige oddetallene er n^2. Vi får da at summen blir $181^2 - 60^2 = 29161$.)

c) Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med både 6 og 9 og som er mindre enn eller lik 2000.

LF: Et tall er delelig med både 6 og 9 hvis og bare hvis det er delelig med 18. Summen er derfor det samme som summen av alle naturlige tall delelige med 18 og mindre eller lik 2000. Siden $1800 + 180 + 18 = 1998$ er det 111 slik tall mindre enn eller lik 2000. Summen blir

$$111(1998 + 18)/2 = 111 \cdot 1008 = \underline{111888}$$

Oppgave 5 Vi har gitt tre punkt $A(2, 3)$, $B(2, -2)$ og $C(6, -5)$ i planet.

a) Det finnes akkurat en sirkel slik at ett av punktene ligger i senteret til sirkelen og de to andre punktene ligger på sirkelen. Hvilket punkt må ligge i senteret til sirkelen? Hva er radien til sirkelen?

LF: Vi har at $\overrightarrow{AB} = [0, -5]$ har lengde 5, $\overrightarrow{AC} = 4[1, -2]$ har lengde $4\sqrt{5}$ og $\overrightarrow{BC} = [4, -3]$ har lengde 5. Hvis punktet $\underline{B \text{ ligger i sentrum}}$ av en sirkel med $\underline{\text{radius } 5}$ så ligger punktene A og C på sirkelen.

b) Sirkelen deles i to sirkelsektorer av de to linjestykkene fra punktet i senteret til hver av de to punktene på sirkelen. Bestem arealet til den minste sirkelsektoren.

Vinkelen v mellom vektorene $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$ er gitt ved

$$\cos(v) = [0, 5] \bullet [4, -3]/5^2 = -3/5.$$

Vinkelen (mellom 0 og π radianer) er derfor $\arccos(-3/5) = 2.214$ ($126.8°$).

Arealet til det minste sirkelsegmentet er $5^2 v/2 = \underline{27.68}$.

c) Finn ett punkt D på sirkelen slik at linjestykket fra senteret til D deler den minste sirkelsektoren (fra b)) i to like store sirkelsektorer.

Vi kan halvvere vinkelen vi fann i del b) og benytte at vektoren $\overrightarrow{BA}$ har samme retning som den positive y-aksen til å konkludere med at vektoren $\overrightarrow{BD}$ har lengde 5 og har vinkel $90° - v/2$ med den positive x-aksen.

Vi gir en alternativ utleding. Vektoren $\overrightarrow{BD}$ står vinkelrett på vektoren $\overrightarrow{AC} = [4, -8] = 4[1, -2]$. Vi finner da at vektoren $\overrightarrow{BD}$ er $[2, 1]\sqrt{5}$. Vektoren $\overrightarrow{OD}$ er summen av $\overrightarrow{OB}$ og vektoren $\overrightarrow{BD}$. Koordinaten til D er derfor lik

$$\underline{(2(1 + \sqrt{5}), 2 - \sqrt{5}) \approx (6.4721, 0.23606)}.$$