Prøve i	FO929A - Matematikk
Dato:	august 2012
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	5 (20 deloppgaver)
Antall sider:	3
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Deriver følgende funksjon

$$f(x) = 2/x + 12x^{11} + 1.$$

Den deriverte er lik $-2/x^2 + 12 \cdot 11x^{10} = -2/x^2 + 132x^{10}$.

b) Deriver følgende funksjon

$$g(x) = \frac{x^3+2}{\sqrt{x^3+2}}.$$

Funksjonen er bare deriverbar når $x^3 + 2 > 0$. Funksjonen er da lik $\sqrt{x^3+2}$. Kjerneregelen gir at den deriverte er lik

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+2}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}.$$

c) Deriver følgende funksjon

$$h(x) = e^{2x+1}\cos(3x-1) + 2^3.$$

Produktregelen gir at den deriverte er lik

$$h'(x) = e^{2x+1}(2\cos(3x-1) - 3\sin(3x-1)).$$

d) Albert pumper luft i en sfærisk ballong. Volumet til ballongen har vekstfart $20\,cm^3/s$. Hvor raskt vokser diameteren til ballongen når ballongen har diameter $10\,cm$?

Volumet til en kule med radius r er $V = 4\pi r^3/3$. (Dette er oppgitt i formelsamlingen.) Diameteren, D, er de doble av radius så $V = \pi D^3/6$ Ved kjerneregelen er derfor

$$\frac{dV}{dt} = \pi D^2/2 \cdot \frac{dD}{dt}.$$

Dette gir at vekstfarten til diameteren er

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2}{\pi D^2}\frac{dV}{dt} = \frac{2}{5\pi}\,cm/s \approx 0,13cm/s.$$

når diameteren er $10cm$.

e) Finn alle punkt på grafen til $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ hvor tangentlinjen har stigningstall 3. Finn tangentlinjene. Den deriverte til funksjonen er $f'(x) = 4x^3 - 4x + 3$. Den deriverte er lik 3 når

$$4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0.$$

Løsningene er $x = 0$, $x = -1$ og $x = 1$. Punktene blir da

$$(0,1), (-1,-3) \quad \text{og} \quad (1,3).$$

Tangentlinjene er $y = 3x + 1$ og $y = 3x$. (De to siste punktene har samme tangentlinje.)

Oppgave 2

a) Finn det bestemte integralet

$$\int_{-3}^{3} 1 + 2x^2 + 3\sin(x)\,dx.$$

Funksjone $3\sin(x)$ er en odde funksjon så integralet over den symmetriske regionen $[-3,3]$ er 0. En antiderivert til $1 + 2x^2$ er $x + 2x^3/3$. Fra fundamentalteoremet i kalkulus er det bestemte integralet lik

$$x + 2x^3/3|_{-3}^{3} = 3 + 18 - (-3 - 18) = 42.$$

b) Finn det ubestemte integralet

$$\int xe^{x^2-1}\,dx.$$

Vi observerer at $(x^2 - 1)' = 2x$. Substitusjon gir da at

$$\int xe^{x^2-1}\,dx = e^{x^2-1}/2 + C.$$

c) Hvis vi tegner grafen til funksjone ser vi at regionen består av tre rettvinkla trekanter. Totalt areal er $13/2 = 6,5$.

d) Finn det bestemte integralet

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx.$$

Dette er lik integralet $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$ siden $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$. Summen av de to integralene er lik $\int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \pi/2$ ved Pytagoras setning. Derfor er integralet lik halvparten av dette, $\pi/4$.

Alternativt kan vi benytte at $\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$. Fundamentalteoremet gir da at

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 - \cos(2x) \, dx = \left. \frac{2x - \sin(2x)}{4} \right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Oppgave 3

a) Viktor har brukt dagen til å samle tomflasker. Han får 1 krone for små og 2,50 kroner for store flasker. Han har 10 flere små enn store flasker, og får utbetalt 125,50 kroner. Hvor mange små og hvor mange store flasker har han samlet inn?

La f være antall små flasker og F antall store flasker. Da er

$$f = F + 10 \quad \text{og} \quad 1 \cdot f + 2,5 \cdot F = 125,5.$$

Vi setter inn for f og får $3,5 \cdot F = 125,5 - 10 = 115,5$. Dette gir at $F = 33$ og $f = 43$. Viktor har altså samlet inn 43 små og 33 store flasker.

b) Mia har en bankkonto med fast årlig rente på 5%. Mia setter inn 1000 kr 1. januar 1998. Hun fortsetter å sette inn 1000 kr hver 1. januar frem til og med 1. januar 2009. Hvor mye har Mia på kontoen ved utgangen av 2011?

Når Mia tar ut pengene har de hun satte først inn har de stått i 13 år og når hun tar ut pengene hun satte inn sist har de stått 3 år. Den totale pengemengden er da

$$(1,05)^3 + (1,05)^4 + (1,05)^5 + \cdots + (1,05)^{13} =$$

$$(1,05)^3(1 + (1,05) + (1,05)^2 + \cdots + (1,05)^{10}) = (1,05)^3 \cdot \frac{(1,05)^{11} - 1}{1,05 - 1}$$

Dette er omtrent 16446 kroner.

c) Bestem konstantene a og b slik at både $e^{ax}\cos(bx)$ og $e^{ax}\sin(bx)$ er løsninger til differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 3y = 0.$$

Bruk svaret i c) til å finne en funksjon $y(x)$ som er en løsning til differensiallikningen og som oppfyller randbetingelsen $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Den deriverte og dobbelderiverte til $e^{ax}\cos(bx)$ er henholdsvis

$$e^{ax}(a\cos(bx) - b\sin(bx))$$

og

$$e^{ax}((a^2 - b^2)\cos(bx) - 2ab\sin(bx)).$$

Setter vi dette inn i differensiallikningen ser vi at konstantene må være lik $a = -1$ og $b = \pm\sqrt{2}$. Vi får samme resultat for $e^{ax}\sin(bx)$.

Lineærkombinasjonen av disse løsningene som tilfredstiller randbetingelsen er $y(x) = e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)/\sqrt{2}$.

Oppgave 4 Gitt to vektorer $\overrightarrow{V} = [1, 0, -1]$ og $\overrightarrow{W} = [1, 1, 0]$.

a) Bestem vektorene $3\overrightarrow{V} + 5\overrightarrow{W}$ og $\overrightarrow{V} - \overrightarrow{W}$, og finn deres absoluttverdi.

b) Bestem parameteren t slik at vektoren $\overrightarrow{V} + t\overrightarrow{W}$ blir kortest mulig.

c) En tredje vektor er gitt ved $\overrightarrow{U} = [1, 2, 3]$. Finn volumet til tetraederet utspent av vektorene $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}$ og $\overrightarrow{U}$.

d) Finn alle vektorer med lengde 1 som har vinkel 45 grader til både $\overrightarrow{V}$ og $\overrightarrow{W}$.

a) Vektorsummene er

$$3\overrightarrow{V} + 5\overrightarrow{W} = [8, 5, -3] \quad \text{og} \quad \overrightarrow{V} - \overrightarrow{W} = [0, -1, -1].$$

Absoluttverdiene er henholdsvis $\sqrt{98} = 7 \cdot \sqrt{2}$ og $\sqrt{2}$.

b) Vektoren $\overrightarrow{V} + t\overrightarrow{W}$ er differansen mellom $-\overrightarrow{V}$ og $t\overrightarrow{W}$. Den er minst mulig når $\overrightarrow{V} + t\overrightarrow{W}$ er vinkelrett på $\overrightarrow{W}$. Dette skjer presis når skalarproduktet

$$(\overrightarrow{V} + t\overrightarrow{W}) \cdot \overrightarrow{W} = 1 + 2t$$

er null. Derfor er avstanden minst når $t = -1/2$.

c) Volumet til tetraederet er lik absoluttverdien til trippelproduktet av de tre vektorene delt på seks. Det er lik $2/6 = 1/3$.

d) Vi ser direkte at enhver vektor langs den positive x-aksen har vinkel 45 grader til både $\overrightarrow{V}$ og $\overrightarrow{W}$.

Vi skal nå see litt mer systematisk på oppgaven. La $\overrightarrow{T} = [x, y, z]$ være en vektor som har vinkel 45 grader til både $\overrightarrow{V}$ og $\overrightarrow{W}$. Lengden til både $\overrightarrow{V}$ og $\overrightarrow{W}$ er $\sqrt{2}$, og $\cos(45°) = 1/\sqrt{2}$. Produktene deres er 1 så derfor får vi $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{T} = 1$ og $\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{T} = 1$. Dette gir at $x - z = 1$ og $x + y = 1$. Vi setter inn $y = 1 - x$ og $z = x - 1$ inn i

$$|\overrightarrow{T}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3x^2 - 4x + 2 = 1.$$

Derfor er $x = 1$ eller $x = 1/3$. Dette gir $\overrightarrow{T} = [1, 0, 0]$ og $\overrightarrow{T} = [1, 2, -2]/3$ er vektorene som har lengde 1 og som har vinkel 45 grader til både $\overrightarrow{V}$ og $\overrightarrow{W}$.

Oppgave 5 Gitt funksjonen $f(x) = (x + 1)^2/(x + 2)$.

a) Bestem den største definisjonsmengden til $f(x)$. Finn eventuelle skrå, horisontale og vertikale asymptoter.

   Funksjonen $f(x)$ er lik $1/(x+2)+x$. Den er definert for alle x ulik -2. Den har skrå asymptote $y = x$ og vertikal asymptote $x = -2$.

b) Bestem når $f(x)$ vokser og når $f(x)$ avtar. Finn alle topp- og bunnpunkt til $f(x)$.

   Den deriverte til funksjonen er $-1/(x+2)^2+1 = (x^2+4x+3)/(x+2)^2$. Den deriverte er lik 0 når $x = -1$ og når $x = -3$. Funksjonen har ingen endepunkt og den deriverte eksisterer i hele definisjonsmengden. De kritiske punktene er derfor $(-1, 0)$ og $(-3, -4)$. Den andrederiverte er lik $f''(x) = 2/(x + 2)^3$. Andrederivert testen gir da at $(-1, 0)$ er et bunnpunkt og at $(-3, -4)$ er et toppunkt. (Alternativt, bruk førstederivert testen eller en annen metode.)

   Funksjonen er økende for $x \leq -3$ og for $x \geq -1$. Funksjonen er avtagende for $-3 \leq x < -2$ og for $-2 < x \leq -1$.

c) Bestem hvor $f(x)$ er konkav opp og konkav ned. Finn eventuelle vendepunkt til $f(x)$. Vi fann $f''(x)$ i b). Funksjonen er konkav opp for $x > -2$ siden den andrederiverte er positiv, og konkav negativ for $x < -2$ siden den andrederiverte er negativ. Funksjonen har ingen vendepunkt.

d) Lag en skisse av grafen til $f(x)$.