Oppgave 1

a)

$$\frac{\sqrt{ab^4}\cdot\sqrt[3]{(ac)^6}}{\sqrt[4]{a^{10}}\cdot b^2}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\left(b^4\right)^{\frac{1}{2}}(ac)^{\frac{6}{3}}}{a^{\frac{10}{4}}b^2}=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^2a^2c^2}{a^{\frac{5}{2}}b^2}=a^{\frac{1}{2}+2-\frac{5}{2}}b^{2-2}c^2=\underline{\underline{c^2}}$$

b) $2\ln(2a)-\ln(4a^2)=2(\ln 2+\ln a)-\left(\ln 4+\ln a^2\right)=2(\ln 2+\ln a)-(\ln 4+2\ln a)$
$=2\ln 2+2\ln a-\ln 4-2\ln a=\ln 2^2-\ln 4=0$

c) $f'(x)=3\cdot 4x^3-\sin(3x)\cdot 3-5\cdot\dfrac{1}{x}=12x^3-3\sin(3x)-\dfrac{5}{x}$

d) $f'(x)=e^{2x}\cdot 2\cdot\ln x+e^{2x}\cdot\dfrac{1}{x}=2e^{2x}\ln x+\dfrac{e^{2x}}{x}$

e) $f'(x)=\dfrac{e^x(x^2+3)-e^x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{e^x(x^2-2x+3)}{(x^2+3)^2}$

f) $\int\left(x^4+\sin(3x)-e^{2x}\right)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}\cos(3x)-\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

g) Bruker substitusjon med $u=x^7 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{du}{dx}=7x^6$.

$$\int x^6e^{x^7}\,\mathrm{d}x=\int x^6e^u\frac{du}{7x^6}=\frac{1}{7}\int e^u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{7}e^u+C=\frac{1}{7}e^{x^7}+C$$

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1}+1&=x\\ \sqrt{2x+1}&=x-1\\ &\Downarrow\\ 2x+1&=(x-1)^2\\ 2x+1&=x^2-2x+1\\ x^2-4x&=0\\ x(x-4)&=0 \qquad\Leftrightarrow\quad x=0 \quad\vee\quad x=4\end{aligned}$$

Sjekker svaret:

For $x=0$:
$V.S=\sqrt{2\cdot 0+1}+1=2$
$H.S=0$
$V.S\neq H.S$, så $x=0$ er ikke en løsning.

For $x = 4$:
$V.S = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} + 1 = 3 + 1 = 4$
$H.S = 4$
$V.S = H.S$, så $x = 4$ er eneste løsning på denne likningen.

b)

$$\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin^{-1}\sin(3x) = \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

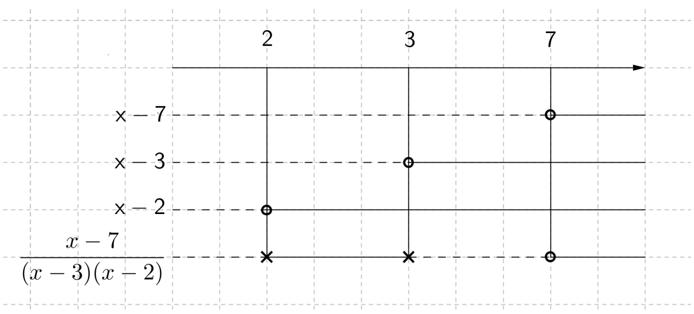
$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \qquad \vee \qquad 3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \qquad \vee \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k$$

Løsning: $x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right\}$.

c)

$$\frac{x+3}{x-2} \leqslant \frac{x+1}{x-3}$$
$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x+1}{x-3} \leqslant 0$$
$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} - \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)} \leqslant 0$$
$$\frac{x^2-9}{(x-2)(x-3)} - \frac{x^2-x-2}{(x-3)(x-2)} \leqslant 0$$
$$\frac{x-7}{(x-3)(x-2)} \leqslant 0$$

Fortegnslinje:



$\underline{\underline{\frac{x+3}{x-2} \leqslant \frac{x+1}{x-3} \text{ når } x \in \langle \leftarrow, 2\rangle \cup \langle 3, 7]}}$

d) Kvotienten k til rekken er $k = \frac{25x}{5} = 5x$.
Rekken konvergerer dersom $-1 < k < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < 5x < 1$.
Konvergensområdet til rekken er $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$.
Summen av rekken er gitt ved

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{5}{1-5x}$$

Oppgave 3

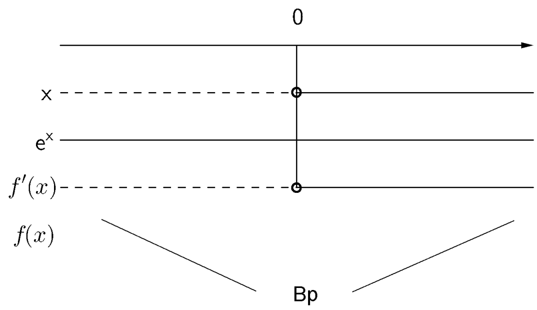
a) Løser:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x-1)e^x &= 0 \\ x-1 = 0 &\vee e^x = 0 \\ x = \underline{\underline{1}} &\vee \text{ ingen løsning} \end{aligned}$$

b) Finner f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)' e^x + (x-1)(e^x)' \\ &= 1e^x + (x-1)e^x \\ &= xe^x \end{aligned}$$

Fortegnslinje for f' :



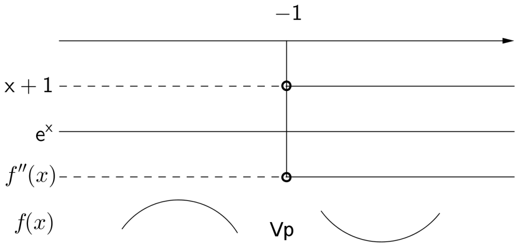
Koordinatene til bunnpunktet er:

$$\begin{aligned} (0, f(0)) &= \left(0, (0-1)e^0\right) \\ &= \underline{\underline{(0, -1)}} \end{aligned}$$

c) Finner f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x)' e^x + x(e^x)' \\ &= 1e^x + xe^x \\ &= (1+x)e^x \end{aligned}$$

Fortegnslinje for f'' :



Koordinatene til vendepunktet er:

$$\begin{aligned}(-1, f(-1)) &= \left(-1, (-1-1)\,e^{-1}\right) \\ &= \underline{\underline{\left(-1, -\frac{2}{e}\right)}}\end{aligned}$$

d) Finner koordinatene til punktet ved:

$$(1, f(1)) = \left(1, (1-1)\,e^{1}\right) = (1, 0)$$

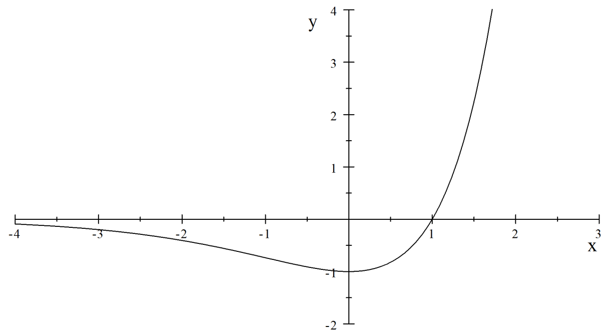
Stigningstallet a til tangenten er gitt ved:

$$\begin{aligned}a &= f'(1) \\ &= 1e^{1} \\ &= e\end{aligned}$$

Bruker ettpunktsformelen for å finne likningen til tangenten:

$$\begin{aligned}y - y_1 &= a\,(x - x_1) \\ y - 0 &= e\,(x-1) \\ y &= \underline{\underline{ex - e}}\end{aligned}$$

e) Tegner grafen til funksjonen f.



f) Arealet A er gitt ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned}\int (\overset{u}{x-1})\overset{v'}{e^x}\,dx &= (\overset{u}{x-1})\overset{v}{e^x} - \int \overset{u'}{1}\overset{v}{e^x}\,dx \\ &= (x-1)\,e^x - e^x + C \\ &= (x-2)\,e^x + C\end{aligned}$$

Hvilket gir:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^2 (x-1)\, e^x \, dx \\
&= \left[(x-2)\, e^x\right]_1^2 \\
&= (2-2)\, e^2 - (1-2)\, e^1 \\
&= \underline{\underline{e}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

Vi velger en tilfeldig person.

a) P(vi velger en gutt)$= \dfrac{15}{13+15} = \dfrac{15}{28}$

P(vi velger en person som drikker kaffe)$= \dfrac{6+10}{28} = \dfrac{16}{28} = \dfrac{4}{7}$

b) P(vi velger er en jente som drikker kaffe)$= \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$

P(kaffe | jente)$= \dfrac{6}{13}$

Oppgave 5

Gitt tre punkter $A(2,1,2)$, $B(0,-1,0)$ og $C(-1,10,3)$

a) $\overrightarrow{AB} = [0-2, -1-1, 0-2] = [-2,-2,-2]$

$\overrightarrow{AC} = [-1-2, 10-1, 3-2] = [-3, 9, 1]$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 1^2} = \sqrt{91}$

$\angle BAC = \cos^{-1}\left(\dfrac{[-2,-2,-2]\cdot[-3,9,1]}{\sqrt{12}\sqrt{91}}\right) = 115,1^\circ$

b) Arealet av trekanten ABC er gitt ved $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

$$
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} \right] = [16, 8, -24]
$$

Arealet av trekanten er: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 8^2 + (-24)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{896} = 4\sqrt{14}$.

c) En normalvektor for planet gjennom A, B og C er $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [16, 8, -24] = 8[2, 1, -3]$.

Har vist at $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} || [2, 1, -3]$, så $[2, 1, -3]$ er normalvektor til planet.

d) Setter inn $B = (x_0, y_0, z_0) = (0, -1, 0)$ og $\vec{\mathbf{n}} = [a, b, c] = [2, 1, -3]$ inn i likning for plan:

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ 2(x - 0) + 1(y + 1) - 3(z - 0) &= 0 \\ 2x + y + 1 - 3z &= 0 \end{aligned}$$

Likningen for planet α er gitt ved: $\quad 2x + y - 3z = -1$

e) Setter $x = 2$ inn i likningen for l: $\quad 2 = 1 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$

Setter dette inn i likningen for z: $\quad 0 = 1 + 1k \quad \Leftrightarrow \quad k = -1.$

Oppgave 6

a) Dersom strengen vi bruker til kvadratet har lengde x, må hver av sidene i kvadratet ha lengde $s = \frac{x}{4}$. Arealet av kvadratet blir er da gitt ved $A_{kvadrat} = s^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$.

Strengen har lengde 1 meter, så lengden av strengen vi bruker til sirkelen må bli $1 - x$. Dette blir da det samme som omkretsen av sirkelen. Vi vet at omkretsen av en sirkel er $2\pi r$, og vi kan sette opp $1 - x = 2\pi r$. Dette gir oss et uttrykk for radius $r = \frac{1-x}{2\pi}$.

Arealet av sirkelen er $A_{sirkel} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2$. Vi kan nå sette sammen arealet av kvadrat og sirkel:

$$A = A_{kvadrat} + A_{sirkel} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2$$

b)

$$A = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2}{4\pi}$$

$$A'(x) = \frac{2x}{16} + \frac{2(1-x)(-1)}{4\pi} = \frac{x}{8} - \frac{2-2x}{4\pi} = \frac{(4+\pi)x}{8\pi} - \frac{1}{2\pi}$$

Vi finner minste verdi der $A'(x) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} \frac{4+\pi}{8\pi}x - \frac{1}{2\pi} &= 0 \\ \frac{4+\pi}{8\pi}x &= \frac{1}{2\pi} \\ x &= \frac{4}{4+\pi} \approx 0.56 \end{aligned}$$

$$A(0.56) = \frac{0.56^2}{16} + \frac{(1-0.56)^2}{4\pi} \approx 0.035$$

Vi må kutte strengen slik at lengden av strengen vi bruker til kvadratet er 0.56 m. Det minste samlede arealet blir da $0.035\,\mathrm{m}^2$. (Her begrunnes svaret med fortegnslinje for den deriverte, evt. vise at $A''(x) > 0$.)