Eksamen, Matematikk forkurs, 24. mai 2017

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Forenkle uttrykket så mye som mulig:

$$\frac{\sqrt{a^3}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt[6]{a}\right)^2}=\frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{6}}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{6}}=a^{\frac{9}{6}+\frac{2}{6}-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}=a^{\frac{6}{6}}=\underline{\underline{a}}$$

b) Løs ulikheten:

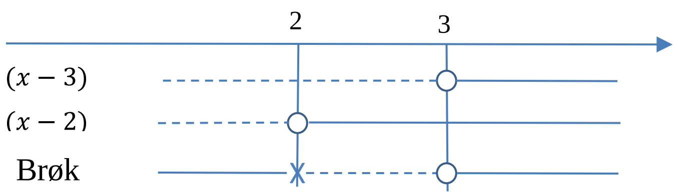
$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x+2}{x+1}\le\frac{x^2+4x}{x^2-x-2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x+1}{x-2}+\frac{x+2}{x+1}-\frac{x^2+4x}{x^2-x-2}\le 0$$

$$\frac{(x+1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}+\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)}-\frac{x^2+4x}{(x-2)(x+1)}\le 0$$

$$\frac{(x^2+2x+1)+(x^2-4)-(x^2+4x)}{(x-2)(x+1)}\le 0$$

$$\frac{x^2+2x+1+x^2-4-x^2-4x}{(x-2)(x+1)}\le 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x^2-2x-3}{(x-2)(x+1)}\le 0$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x+1)}\le 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x-3}{x-2}\le 0$$



Løsning: $\underline{\underline{x\in\langle 2,3]}}$

Løs likningene ved regning:

c)

$$2\sqrt{3}\sin(2x) - 3 = 0\ , \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$

$$\sin(2x) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow$$

$$1)\quad 2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$$

$$2)\quad 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$$

Innenfor definisjonsområdet $x \in [0, 2\pi\rangle$ kan vi velge $k = 0$ og $k = 1$. Dermed:

$$x = \underline{\underline{\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}}}$$

d) $\ln(x^2) - \ln(3x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x^2}{3x-2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{3x-2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3x - 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = 2$

Ved å sette prøve på svare ser vi at begge passer i opprinnelig likning, dermed:

$x = \underline{\underline{\{1, 2\}}}$

e) En rekke er gitt som:

$$2 + 4e^x + 8e^{2x} + 16e^{3x} + \cdots$$

For hvilke verdier av kvotienten k er rekken konvergent?

Vi gjenkjenner dette som en geometrisk rekke som konvergerer når $-1 < k < 1$.
Vi finner k som forholdet mellom etterfølgende ledd:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4e^x}{2} = 2e^x \quad \Rightarrow \quad -1 < 2e^x < 1$$

Venstre ulikhet er oppfylt for alle x. Siden $\ln$ er en monotont voksende funksjon, vil høyre ulikhet fortsatt være gyldig når vi tar $\ln$ på begge sider av ulikheten:

$$\ln(2e^x) < \ln 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln 2 + \ln e^x < \ln 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln e^x < \ln 1 - \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\ln 2$$

Rekken konvergerer for $\underline{\underline{x < -\ln 2}}$.

Summen av den konvergente rekka:

$$s = \frac{a_1}{1 - k} = \underline{\underline{\frac{2}{1 - 2e^x}}}$$

Deriver funksjonene:

f)

$$f(x) = \frac{x}{x^3+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (x^3+1) - x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \underline{\underline{\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}}}$$

g)

$$g(x) = \ln\sqrt{\cos 2x} = \ln(\cos 2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot \ln(\cos 2x) \quad \Rightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \underline{\underline{-\tan 2x}}$$

Regn ut integralene:

h)

$$\int \frac{2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{2}{xx^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{xx^{\frac{1}{2}}}dx = \int \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x}dx = 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx + \int \frac{1}{x}dx$$

$$= 2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \ln|x| + C = \underline{\underline{-\frac{4}{\sqrt{x}} + \ln|x| + C}}$$

i)

$$\int_0^\infty xe^{1-x^2}\,dx \qquad u = 1-x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -2xdx \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\int_0^\infty xe^{1-x^2}\,dx = \int_0^\infty xe^u\frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^u du = -\frac{1}{2}\left[e^{1-x^2}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2}(0-e) = \underline{\underline{\frac{e}{2}}}$$

j) Løs differensiallikningen:

$$y' + x^2y = x^2$$

med randkravet $y(0) = 0$.

$$y' = x^2(1-y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1-y} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-y}dy = x^2dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{1-y}dy = \int x^2dx \quad \Rightarrow$$

$$-\ln|1-y| = \frac{1}{3}x^3 + C_1 \quad \Rightarrow \quad |1-y| = e^{-\frac{1}{3}x^3}\cdot e^{-C_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - y = \pm e^{-C_1} \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} = Ce^{-\frac{1}{3}x^3} \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 - \ Ce^{-\frac{1}{3}x^3}$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - C \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \underline{\underline{1 - e^{-\frac{1}{3}x^3}}}$$

Oppgave 2

Gitt funksjonen f ved funksjonsuttrykket $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$.

a) Vis at:

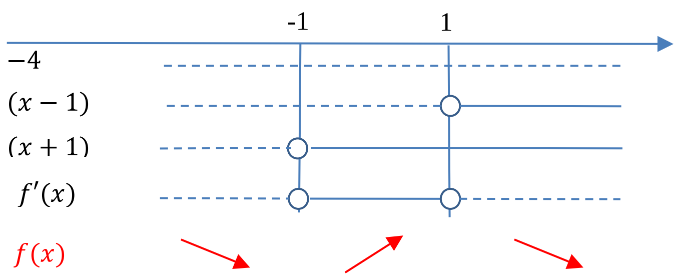
$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2+1)^2} \qquad \text{q. e. d.}$$

b) Bestem koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

$$-4x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-4(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

Fortegnsdrøfting av $f'(x)$:



$$f(1) = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2, \qquad f(-1) = \frac{4(-1)}{(-1)^2+1} = -\frac{4}{2} = -2 \qquad \Rightarrow$$

Toppunkt: $\underline{\underline{(1, 2)}}$ Bunnpunkt: $\underline{\underline{(-1, -2)}}$

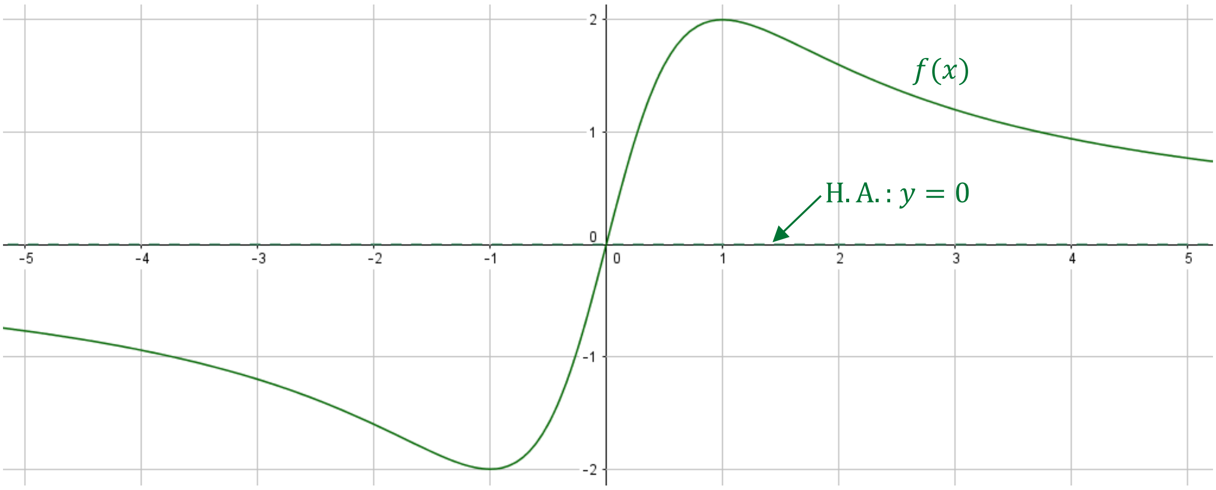
c) Finn eventuelle asymptoter til funksjonen $f(x)$ og skisser grafen med eventuelle asymptoter i intervallet $x \in \langle -5, 5 \rangle$.

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

Ingen vertikal asymptote, siden $x^2 + 1 \neq 0$ for alle verdier av x.

$\lim\limits_{n \to \pm\infty} f(x) = 0$, dvs. horisontal asymptote: $\underline{\underline{y = 0}}$

Grafen i intervallet $x \in \langle -5, 5 \rangle$:



d) Finn tangenten til funksjonsgrafen for $x = 0{,}40$.

$f(0{,}40) = \frac{4 \cdot 0{,}40}{0{,}40^2 + 1} \approx 1{,}38$, dvs. $(0.40,\ 1.38)$ er et punkt på tangenten.

Stigningstallet til tangenten: $a = f'(0{,}40) = \frac{-4 \cdot 0{,}40^2 + 4}{(0{,}4^2 + 1)^2} \approx 2{,}50$

Ettpunktsformelen gir: $y - 1{,}38 = 2{,}50(x - 0{,}40) \iff y = 2{,}5x - 2{,}5 \cdot 0{,}4 + 1{,}38$

$\underline{\underline{y = 2{,}50x + 0{,}38}}$

e) Grafen til f og den rette linja $g(x) = \frac{4}{5}x$ avgrenser et flatestykke i første kvadrant. Beregn arealet av flatestykket.

Finner grensene for $f(x) = g(x)$:

$$\frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}x \,|\cdot 5(x^2 + 1) \iff 20x = 4x(x^2 + 1)|:4 \iff x^3 + x - 5x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0 \iff x(x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \lor \ = \pm 2$$

Kun i 1. kvadrant, dvs. $x = 0$ og $x = 2$ er hhv. nedre og øvre grense:

$$A = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^2 \frac{4x}{x^2 + 1} - \frac{4}{5}x\,dx = \int_0^2 \frac{4x}{x^2 + 1}dx - \frac{4}{5}\int_0^2 x\,dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{2x} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{4x}{x^2+1}dx = \int \frac{4x}{u}\frac{du}{2x} = 2\int \frac{1}{u}du = 2\ln|u| + C = 2\ln|x^2+1| + C$$

$$\frac{4}{5}\int xdx = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{2}{5}x^2 + C$$

$$A = \left[2\ln|x^2+1| - \frac{2}{5}x^2\right]_0^2 = \left(2\ln(4+1) - \frac{2}{5}\cdot 4\right) - 0 = \underline{\underline{2\ln 5 - \frac{8}{5}}} \approx 1{,}62$$

Oppgave 3

Gitt punktene $A(6,0,0)$, $B(0,-2,0)$ og $C(0,0,3)$.

a) Finn arealet av trekanten ABC.

$$\overrightarrow{AB} = [0-6, -2-0, 0-0] = [-6,-2,0], \qquad \overrightarrow{AC} = [0-6, 0-0, 3-0] = [-6,0,3]$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -6 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}\right] = [-6, 18, -12]$$

$$= 6[-1, 3, -2]$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}6\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \underline{\underline{3\sqrt{14}}} \approx 11{,}2$$

b) En linje l gjennom C står vinkelrett på ΔABC. Finn en parameterframstilling for denne linjen.

Retningsvektor (fra $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$): $\vec{v} = [-1,3,-2]$. Punkt på linja: $(0,0,3)$ $\Rightarrow$

$$l: \begin{cases} x = 0 + (-1)t & = -t \\ y = 0 + 3t & = 3t \\ z = 3 + (-2)t & = 3 - 2t \end{cases}$$

c) Finn koordinatene til linjen l fra punkt b) sitt skjæringspunkt med xy −planet.

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2}, \quad y = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Skjæringspunktet med xy −planet er $\underline{\underline{\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)}}$

d) Finn likningen for planet gjennom de tre punktene A, B og C.

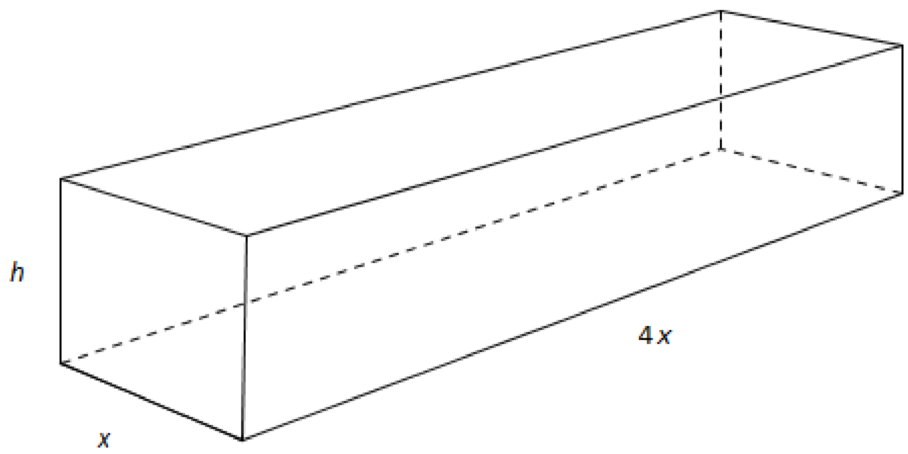
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

der $[a, b, c] = [-1,3,-2]$ og $(x_0, y_0, z_0) = A(6,0,0) \quad \Rightarrow$

$$-1 \cdot (x - 6) + 3(y - 0) - 2(z - 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-x + 3y - 2z + 6 = 0}}$$

Oppgave 4

Vi har et rett prisme der lengden av grunnflaten er fire ganger så stor som bredden. Volumet er 200 cm^3. Vi setter bredden lik x cm. Se skissen.



a) Vis at $h = \frac{50}{x^2}$

Volumet av et rett prisme er produktet av lengden, bredden og høyden.

Det gir:

$$200 = 4x \cdot x \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{200}{4x^2} = \frac{50}{x^2} \quad \text{q. e. d.}$$

b) Vis at overflaten O av prismet kan skrives:

$$O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2$$

Overflaten av et rett prisme består av seks rektangler, hvorav to og to har samme areal.

$$O(x) = 2 \cdot (x \cdot 4x + x \cdot h + 4x \cdot h) = 8x^2 + 10x \cdot \frac{50}{x^2} = \frac{500}{x} + 8x^2 \qquad \text{q. e. d.}$$

c) Vis at $O'(x) = \frac{-500+16x^3}{x^2}$ og bruk dette til å finne den minste overflaten O som prismet kan ha.

Hva er lengden, bredden og høyden nå?

$$O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2 \quad \Rightarrow \quad O'(x) = 500 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 8 \cdot 2x = -\frac{500}{x^2} + 16x$$

$$O'(x) = \frac{-500 + 16x^3}{x^2} \quad \text{q. e. d.}$$

Vi setter den deriverte lik null for å finne verdier av x som gir ekstremalpunkter.

$$O'(x) = 0$$

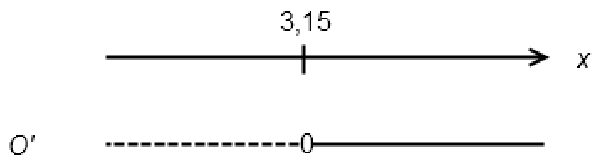
$$\frac{-500 + 16x^3}{x^2} = 0$$

$$-500 + 16x^3 = 0$$

$$x^3 = \frac{500}{16}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{500}{16}} = \sqrt[3]{\frac{125}{4}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt[3]{4}} \approx 3{,}15$$



Vi ser av fortegnslinja for $O'(x)$ at vi har med et bunnpunkt å gjøre. Den tilhørende overflaten er:

$$O(3{,}15) = \frac{500}{3{,}15} + 8 \cdot 3{,}15^2 = 238{,}11$$

$$h = \frac{50}{3{,}15^2} \approx 5{,}04$$

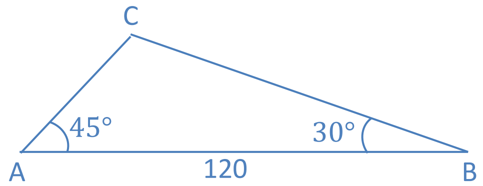
Den minste overflaten prismet kan ha, er omtrent 238 cm^2.

I dette tilfellet er bredden (x) 3,15 cm, lengden ($4x$) 12,6 cm og høyden (h) 5,04 cm.

Oppgave 5

Et tomteareal har form av en trekant ABC der $AB = 120$ m, $\angle A = 45°$ og $\angle B = 30°$.

a) Finn de manglende sidene og vinklene i trekanten. Hvis mulig, vis utregning med eksakte verdier.



$\angle C = 180° - 45° - 30° = \underline{\underline{105°}}$

$$\frac{BC}{\sin 45°} = \frac{AB}{\sin 105°} \quad \Leftrightarrow \quad BC = \frac{AB \cdot \sin 45°}{\sin 105°} = \frac{120 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \;|\cdot 4}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \;|\cdot 4}$$

$$BC = \frac{240 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{240 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{240 \cdot (\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3} - 2)}{6-2} = \frac{240 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$= \underline{\underline{120(\sqrt{3}-1)}} \approx 87{,}8$$

Hvis kalkulator ikke gir eksakt at $\sin 105° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, kan man at:

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \sin 60° \cdot \cos 45° + \cos 60° \cdot \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$\frac{AC}{\sin 30°} = \frac{BC}{\sin 45°} \quad \Leftrightarrow \quad AC = \frac{120(\sqrt{3}-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \underline{\underline{60\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}} \approx 62{,}1$$

b) Beregn arealet av tomta (med eksakte verdier hvis mulig).

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30° = \underline{\underline{3600(\sqrt{3}-1)}} \approx 2635{,}4$$

c) Anta at ei rett linje CD fra C ned på AB (D ligger på AB) deler tomta i to. Arealet av trekanten ADC skal utgjøre en tredjedel av hele tomtas areal. Hvor lang blir AD?

$$A_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin 45° = \frac{1}{3} A_{\Delta ABC} \quad \Rightarrow$$

$$AD = \frac{2A_{\Delta ABC}}{3AC \cdot \sin 45°} = \frac{2 \cdot 3600(\sqrt{3}-1)}{3 \cdot 60\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \underline{\underline{40}}$$

Oppgave 6

To personer a og b skyter annenhver gang på en ballong. Den som treffer ballongen først har vunnet spillet. La A og B være begivenhetene at henholdsvis a og b treffer ballongen i et enkelt skudd. Anta at disse begivenhetene er uavhengige. Anta at $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ og at a skyter først.

a) Regn ut følgende sannsynligheter:

- Sannsynligheten for at a bommer i et enkelt skudd (dvs. $P(\bar{A})$).

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

- Sannsynligheten for at a bommer på første forsøk og b treffer (dvs. $P(\bar{A} \cap B)$).

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

- Sannsynligheten for at det blir skutt tre ganger og at a vinner spillet.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

- Sannsynligheten for at det blir skutt fem ganger og at a vinner spillet.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap \bar{B} \cap A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$$

- Den totale sannsynligheten for at det blir skutt en, tre eller fem ganger og at a vinner.

$$P(\text{en, tre eller fem ganger og at } a \text{ vinner}) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{9}{27} + \frac{3}{27} + \frac{1}{27} = \underline{\underline{\frac{13}{27}}}$$
$$\approx 0{,}4815$$

b) Hva er sannsynligheten for at a vinner spillet?

a vinner hvis det må skytes én, tre, fem, sju, osv. , dvs et odde antall ganger for å få en vinner. Fra resultatet i a) ser vi da at:

$$P(a\ vinner\ spillet) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots$$

Dette er ei konvergent, uendelig geometrisk rekke med $a_1 = \frac{1}{3}$, $k = \frac{1}{3}$ og sum $s = \frac{a_1}{1-k}$.

$$P(a\ vinner\ spillet) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$