Løsningsforslag i matematikk 06.08.2018

– Oppgave 1 –

(a)

$$\frac{\left(a^2b\right)^{-1}\cdot\sqrt[3]{b^4a}}{(ab)^{-\frac{2}{3}}}=\frac{a^{-2}b^{-1}b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}}=\frac{a^{-2+\frac{1}{3}}b^{-1+\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}}=a^{-2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}b^{-1+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}$$
$$=a^{-1}b=\frac{b}{a}.$$

(b) Omskrivning av likningen gir

$$\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)=0 \iff \frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\sqrt{3} \iff \tan(x)=-\sqrt{3},$$

under forutsettning at $\cos(x)\neq 0$. Altså,

$$x=\tan^{-1}(-\sqrt{3})+n\pi=\frac{2\pi}{3}+n\pi=\begin{cases}\frac{2\pi}{3} & n=0\\ \frac{5\pi}{3} & n=1.\end{cases}$$

(c) Vi har

$$3e^{4x}-2e^{x}=e^{x}(3e^{3x}-2)=0.$$

Siden $e^x\neq 0$, må $3e^{3x}-2=0$. Altså,

$$e^{3x}=\frac{2}{3} \iff \left(e^x\right)^3=\frac{2}{3} \iff e^x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Longrightarrow x=\ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

(d) $x^2-2x-35=(x-7)(x+5)$; fortegnskjema gir da at $x\in[-5,7]$.

(e) Bruk av kjerneregelen gir $f'(x)=-4x\sin(x^2)$.

(f) Bruk av produktregelen gir $g'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}-2e^{-x}(1-x)$.

(g)

$$\int -\frac{\sin(x)}{2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sin(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos(x)+C.$$

(h) Vi observerer at $4x-2=2(2x-1)=2(x^2-x+2)'$. Fra dette ser vi

$$\int\frac{4x-2}{x^2-x+2}\mathrm{d}x=2\int\frac{(x^2-x+2)'}{x^2-x+2}\mathrm{d}x=\ln|x^2-x+2|+C.$$

Funksjonen x^2-x+2 er alltid større enn null så vi kan fjerne absoluttbeløpstegnen hvis vi så ønsker. Vi beregner nå

$$\int_0^2\frac{4x-2}{x^2-x+2}\mathrm{d}x=2\Big[\ln(x^2-x+2)\Big]_0^2=2\left(\ln 4-\ln 2\right)$$
$$=4\ln 2-2\ln 2=2\ln 2.$$

– **Oppgave 2** –

(a) Vi ser at $f(0) = 0$ så funksjonen skjærer y-aksen i origo. For å finne skjæringen med x-aksen må vi løse likningen $\frac{x^2}{2x-1} = 0$. Løsningen til denne er $x = 0$. Altså skjærer funksjonen x-aksen bare i origo.

(b) Enten bruker man polynomdivisjon eller observerer at

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{x-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\frac{x^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x-2}\right).\end{aligned}$$

Vi har at

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{4x-2} = 0.$$

Derfor fins en skrå asymptote $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$. Siden $f\left(\frac{1}{2}\right) = \infty$, ser vi at vi har en vertikal asymptote i $x = \frac{1}{2}$.

(c)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)' &= \frac{(x^2)'\cdot(2x-1) - x^2(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{2x(2x-1)-x^2\cdot 2}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}.\end{aligned}$$

Dette betyr at $x = 0$ og $x = 1$ er stasjonære punkter. Vi finner $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$. Et fortegnskjema gir at $(0, 0)$ er et toppunkt og $x = (1, 1)$ er et bunnpunkt.

(d) Vi vet fra (b) at

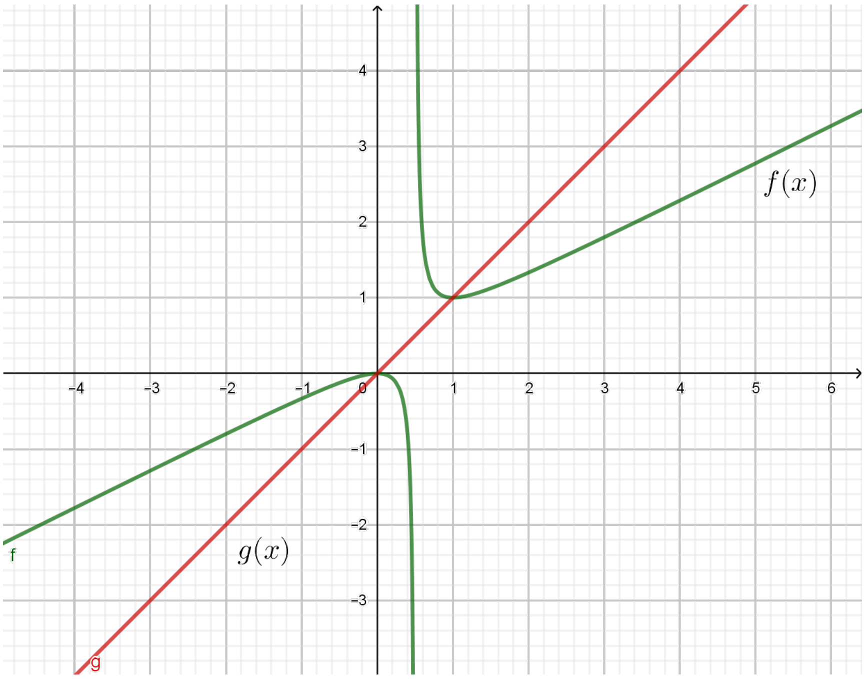
$$\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x-2}\right).$$

Derfor får vi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{2x-1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x-2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln|4x-2|\right)+C,\end{aligned}$$

altså,

$$\begin{aligned}A &= \int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\ln|4x-2|\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4}\cdot 2^2 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\ln|4\cdot 2-2| - \frac{1}{4}\cdot 1^2 - \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{8}\ln|4\cdot 1-2| \\ &= 1 + \frac{\ln 3}{8}\end{aligned}$$



Figur 1: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ og $g(x) = x$.

(e) Vi har

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{x^2}{2x-1} = x \iff \frac{x^2 - (2x-1)\cdot x}{2x-1} = 0 \\ &\iff -\frac{x(x-1)}{2x-1} = 0, \end{aligned}$$

fra hvilket det følger at $f(x) = g(x)$ da $x = 0, 1$. Dette gir skjæringspunktene $(0,0)$ og $(1,1)$. Se Fig. 1.

– Oppgave 3 –

(a) Med $A(3,2,2)$, $B(6,1,-1)$ og $D(3,4,0)$ finner vi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [3,-1,-3] \\ \overrightarrow{AD} &= [0,2,-2] \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{19} \\ |\overrightarrow{AD}| &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Skalarproduktet mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$ blir $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$. Fra definisjonen på skalarprodukt finner vi da

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{2\sqrt{19}\sqrt{2}}\right) \approx 71{,}1^\circ.$$

(b) Vi finner

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = [6,1,-1] + [0,2,-2] = [6,3,-3] \quad \Longrightarrow \quad C(6,3,-3).$$

(c) Areal kan fås som absoluttbeløpet av $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 8\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3 = [8,6,6].$$

Fra dette følger

$$A = |[8,6,6]| = \sqrt{8^2 + 6^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}.$$

(d) Vi velger $\overrightarrow{AC} = [3,1,-5]$ som retningsvektor for linjen. Da får vi parametrisering

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x &= & 3+3t \\ y &= & 2+t \\ z &= & 2-5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(e) Siden linjestykket mellom A og C deler parallellogrammet i to kongruente trekanter er det egentlig opplagt, men hvis vi skal vise det med vektorer kan man gjøre følgende:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = [3,2,2] + \frac{1}{2}[3,1,-5] = \left[\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right]$$
$$\Longrightarrow \quad M\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Dersom M også skal være midtpunkt på linjestykket BD må $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Vi beregner

$$\overrightarrow{BD} = [-3,3,1]$$
$$\overrightarrow{BM} = \left[\frac{9}{2} - 6, \frac{5}{2} - 1, -\frac{1}{2} - (-1)\right] = \frac{1}{2}\left[-3,3,1\right],$$

fra hvilket påstandet følger.

(f) Siden volumet av en pyramide er $V = \frac{G \cdot h}{3}$, der G er grunnflatearealen og h høyden, kan vi få h som $h = \frac{3V}{G}$. Vi kjenner G fra (c), $G = 2\sqrt{34}$. Volumet av pyramiden fås som

$$\frac{(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AT}}{3}.$$

Vektorproduktet har vi også beregnet i (c), $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = [8,6,6]$. Vi finner derfor $\overrightarrow{AT} = [1,0,3]$ og

$$V = \frac{(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AT}}{3} = \frac{[8,6,6] \cdot [1,0,3]}{3} = \frac{26}{3}.$$

Altså,

$$h = \frac{3V}{G} = \frac{3 \cdot \frac{26}{3}}{2\sqrt{34}} = \frac{13}{\sqrt{34}} \approx 2{,}23.$$

– **Oppgave 4** –

La A og B være følgende hendinger

$$A = \text{«Perfekt motorsykkel»}, \qquad B = \text{«God dagsform»}.$$

(a) Betinget sannsynlighet gir

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12.$$

(b) Vi finner

$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}075 \neq 0{,}12;$$

altså er hendingene ikke uavhengige.

(c) Bayes setning gir

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}25} = 0{,}48.$$

(d) Det første leddet er dagens dose. Det andre leddet er gårsdagens dose som har blitt brutt ned med 20%. Det tredje leddet er dosen hun tok for to dager siden. Denne dosen har blitt nedbrutt med 20% i to omganger. Slik fortsetter det.

(e) Vi har

$$\begin{aligned} k &= \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}8^1}{1{,}5} = 0{,}8 \\ a_6 &= a_1 \cdot k^5 = 1{,}5 \cdot 0{,}8^5 \approx 0{,}49 \\ S_6 &= a_1 \frac{k^6 - 1}{k - 1} = 1{,}5 \cdot \frac{0{,}8^6 - 1}{0{,}8 - 1} \approx 5{,}53. \end{aligned}$$

(f) Siden $k < 1$ konvergerer den uendelige rekken og summen blir

$$S = a_1 \frac{1}{1-k} = 1{,}5 \cdot \frac{1}{1 - 0{,}8} = 7{,}5 < 10.$$

Altså er Emma godt innenfor kroppens tåleevne for dette virkestoffet, uansett hvor lenge hun fortsetter tablettkuren.

– **Oppgave 5** –

Observér først at problemet har naturlig begrensing i at $x \in [0, 3]$. Derfor vet vi at største og minste verdi eksisterer. Volumet av en kjegle er som vi allerede notert $V = \frac{G \cdot h}{3}$. I dette tilfelle ser vi

$$V(x) = \frac{G(x) \cdot h(x)}{3} = \frac{\pi f(x)^2 x}{3} = \frac{\pi(3 - x)^2 x}{3} = \frac{\pi(9x - 6x^2 + x^3)}{3}.$$

Åpenbart er $V(0) = V(3) = 0$ det minste verdiet (vi kan ikke ha negative volumer). Derfor vet vi at det må finnes et lokalt maksimum i intervallet $[0, 3]$ siden $V(x)$ ikke er identisk lik null. Vi deriverer og får

$$V'(x) = \pi(3 - 4x + x^2) = \pi(x - 1)(x - 3).$$

Altså har vi stasjonære punkter for $x = 1$ og $x = 3$. Punktet $x = 3$ er et randepunkt og er allerede tatt hensyn til. Derfor må $x = 1$ være et lokalt maksimum. Dette kan vi kontrollere ved help av den andrederiverte

$$V''(x) = \pi(-4 + 2x) \quad \Longrightarrow \quad V''(1) = \pi(-4 + 2) < 0.$$

Vi har $f(1) = 3 - 1 = 2$ og kan derfor konkludere med at $C = (1, 2)$ og $V_{\text{maks}} = V(1) = \frac{4\pi}{3}$.