Oppgave 1

Løs likningene ved regning. Løsningene skal gis ved eksakte svar.

a)

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \quad |\cdot 2x(x-2) \qquad\qquad x \epsilon R\ /\ \{2\}$$

$$\frac{1\cdot 2x(x-2)}{x-2}-\frac{1\cdot 2x(x-2)}{x}=\frac{1\cdot 2x(x-2)}{2}$$

$$2x-2(x-2)=x(x-2)$$

$$2x-2x+4=x^2-2x$$

$$x^2-2x-4=0$$

$$x_1=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{5}}{2}=1\pm\sqrt{5}$$

$$\underline{\underline{L=\{1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\}}}$$

b)

$$(\ln x)^2+2\ln x=8 \qquad\qquad x\epsilon\langle 0,\rightarrow\rangle$$

$$(\ln x)^2+2\ln x-8=0$$

$$\ln x=2 \qquad \ln x=-4$$

$$x=e^2 \qquad x=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$$

$$\underline{\underline{L=\left\{\frac{1}{e^4}, e^2\right\}}}$$

c)

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \qquad\qquad x \in [\pi, 2\pi\rangle$

$\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos x}$

$\tan x = -\sqrt{3}$

$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$

$\underline{\underline{L = \left\{\frac{5\pi}{3}\right\}}}$

Oppgave 2

Bestem x og y ut av likningen:

$\frac{a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} \cdot (b^2)^{-\frac{1}{2}}} = a^x \cdot b^y$

$\frac{a^{-2} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{2\left(-\frac{1}{2}\right)}} = a^x \cdot b^y$

$\frac{a^{-2} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-1}} = a^x \cdot b^y$

$a^{-2} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot b^1 = a^x \cdot b^y$

$a^{-2+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}+1} = a^x \cdot b^y$

$a^{-1} \cdot b^{\frac{3}{2}} = a^x \cdot b^y$

$\underline{\underline{x = -1 \quad y = \frac{3}{2}}}$

Oppgave 3

Deriver funksjonene og forenkle svarene mest mulig.

a)

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{e^x}$$

$u = x^2 - x \qquad u' = 2x - 1$

$v = e^x \qquad v' = e^x$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)e^x - (x^2 - x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - 1 - x^2 + x)}{(e^x)^2} = \underline{\underline{\frac{-x^2 + 3x - 1}{e^x}}}$$

b)

$$g(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{e^{2x}}\right) = \ln(2x+1) - \ln e^{2x} = \ln(2x+1) - 2x \cdot \ln e = \ln(2x+1) - 2x$$

$$g'(\mathrm{x}) = \frac{2}{2\mathrm{x}+1} - 2 = \frac{2}{2\mathrm{x}+1} - \frac{2(2\mathrm{x}+1)}{2\mathrm{x}+1} = \frac{-4\mathrm{x}}{2\mathrm{x}+1} = \underline{\underline{-\frac{4\mathrm{x}}{2\mathrm{x}+1}}}$$

Oppgave 4

Regn ut integralene

a)

$$\int x \cdot e^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + C = \underline{\underline{e^x(x-1) + C}}$$

$v = x \qquad v' = 1$

$u = e^x \qquad u' = e^x$

b)

$$\int 2\pi x \cdot \sin(\pi x^2 + 1)\,dx = \int 2\pi x \cdot \sin(u) \cdot \frac{du}{2\pi x} = \int \sin u\,du + C = -\cos u + C$$

$u = \pi x^2 + 1$

$$\underline{\underline{= -\cos(\pi x^2 + 1) + C}}$$

$$\frac{du}{dx} = 2\pi x$$

$$dx = \frac{du}{2\pi x}$$

c)

$$\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-3}\right) dx =$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$$A = \frac{-1-1}{-1-3} = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-3|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|1+1| + \ln|1-3| - (\ln|0+1| + \ln|0-3|))$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 2 - \ln 1 - \ln 3)$$

$$\underline{\underline{= \ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln 3}}$$

Oppgave 5

Gitt funksjonen $f(x) = e^x(e^x - 1)$.

a)

Finn funksjonens skjæringspunkt med x-aksen.

$f(x) = e^x(e^x - 1) = 0$

$e^x - 1 = 0$ $\qquad e^x = 0$

$e^x = 1$

$\ln e^x = \ln 1$

$x \ln e = 0$

$x = 0$ $\qquad \underline{\underline{Skjæringspunkt\ med\ x - aksen: \quad (0, 0)}}$

b)

Finn funksjonens ekstremalpunkt.

$u = e^x$ $\qquad u' = e^x$

$v = e^x - 1$ $\qquad v' = e^x$

$f'(x) = e^x \cdot (e^x - 1) + e^x \cdot e^x = e^x(e^x - 1 + e^x) = e^x(2e^x - 1) = 0$

$2e^x - 1 = 0$ $\qquad e^x = 0$

$e^x = \frac{1}{2}$

$$\ln e^x = \ln \frac{1}{2}$$

$$x = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

$u = e^x \qquad u' = e^x$

$v = 2e^x - 1 \qquad v' = 2e^x$

$$f''(x) = e^x(2e^x - 1) + e^x \cdot 2e^x = e^x(2e^x - 1 + 2e^x) = e^x(4e^x - 1)$$

$$f(-\ln 2) = e^{-\ln 2}\left(e^{-\ln 2} - 1\right) = 2^{-1}(2^{-1} - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f''(-\ln 2) = e^{-\ln 2}\left(4e^{-\ln 2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(4 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \; > \; 0 \quad \rightarrow \quad Minpunkt$$

$$\underline{\underline{Minpunkt\ (-\ln 2\,, -\frac{1}{4})}}$$

c)

Finn funksjonens tangent i punktet $\left(ln2, f(ln2)\right)$.

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$x_1 = \ln 2$$

$$y_1 = f(\ln 2) = e^{\ln 2}\left(e^{\ln 2} - 1\right) = 2$$

$$f'(x_1) = e^{\ln 2}\left(2e^{\ln 2} - 1\right) = 6$$

$$y - 2 = 6(x - \ln 2)$$

$$\underline{\underline{y = 6x - 6\ln 2 + 2}}$$

Oppgave 6

a)

Finn summen av den aritmetiske rekka

$$5 + 7 + 9 + \cdots + 127 + 129$$

$d = a_2 - a_1 = 7 - 5 = 2$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$129 = 5 + (n-1)2$$

$$n = \frac{129-5}{2} + 1 = 63$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$S_{63} = 63 \cdot \frac{5+129}{2} \underline{\underline{= 4221}}$$

b)

Distansen ballen tilbakelegger: $d = 2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}8^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}8^3 + \cdots$

$$= 2 + (2 \cdot 2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}8^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}8^3 + \cdots)$$

Delen som er inne i parentesen er en geometrisk rekke med kvotient $k = 0{,}8$.
Da $|k| < 1$ konvergerer rekka.

$$d = 2 + \frac{a_1}{1-k} = 2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 0{,}8}{1 - 0{,}8} = 18$$

$\underline{\underline{Ballen\ vil\ tilbakelegge\ en\ distanse\ d = 18m}}$

c)

Gitt den geometriske rekka

$$(x+1)+1+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\cdots$$

$$k=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{x+1}$$

$$-1<k<1$$

$$-1<\frac{1}{x+1}<1$$

$$-1<\frac{1}{x+1}$$

$$0<\frac{1}{x+1}+1$$

$$0<\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}$$

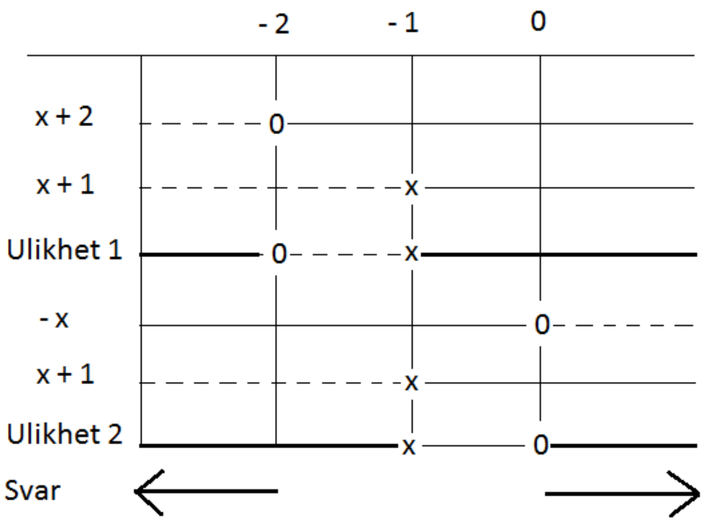
$$0<\frac{x+2}{x+1}$$

$$\frac{1}{x+1}<1$$

$$\frac{1}{x+1}-1<0$$

$$\frac{1}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}<0$$

$$\frac{-x}{x+1}<0$$



$\underline{\underline{Konvergensintervallet:\quad \langle\leftarrow,-2\rangle\cup\langle 0,\rightarrow\rangle}}$

Oppgave 7

Gitt en trekant ABC hvor koordinatene til A er $(0, 0)$ og Koordinatene til B er $(8, 0)$.

$\angle A = 45° \; og \; \angle B = 45°$.

Regn ut volumet av legemet som fremkommer når trekanten ABC roterer $360°$ rundt x – aksen.

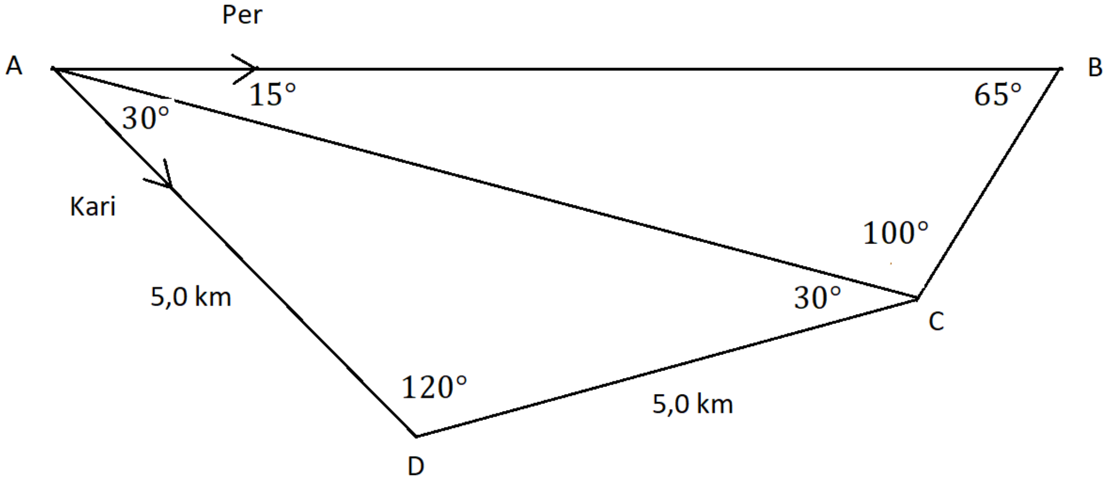
Volumet av omdreiningslegemet som framkommer blir lik volumet av to kjegler med $h = 4 \; og \; r = 4$.

$$V = 2 \cdot \frac{Grunnflate \cdot høyde}{3} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 4}{3} = \underline{\underline{\frac{128\,\pi}{3}}}$$

En kan også regne ut integralet:

$$V = 2\pi \int_0^4 x^2 \cdot dx = 2\pi \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{2\pi}{3}(4^3 - 0) = \underline{\underline{\frac{128\,\pi}{3}}}$$

Oppgave 8



$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos D$$

$$AC = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120°}\ km \approx 8.66\ km$$

$$\frac{BC}{\sin 15°} = \frac{8.66\ km}{\sin 65°} \quad \to \quad BC = \frac{8.66\ km \cdot \sin 15°}{\sin 65°} \approx 2.47\ km$$

$$\frac{AB}{\sin 100°} = \frac{8.66\ km}{\sin 65°} \quad \to \quad AB = \frac{8.66\ km \cdot \sin 100°}{\sin 65°} \approx 9.41\ km$$

$Per\ går\text{:}\ \ 9.41\ km$ $\qquad\qquad$ $Kari\ går\text{:}\ 5.0\ km + 5.0\ km + 2.47\ km = 12.47\ km$

$$12.47\ km - 9.41\ km = 3.06\ km$$

$$\frac{3.06 \cdot 100\%}{9.41} \approx 32.5\%$$

$\underline{\underline{Kari\ går\ 32.5\%\ lengre\ enn\ Per}}$

Oppgave 9

I et rettvinklet koordinatsystem har vi følgende vektorer:

$A(-2,1,2)$, $B(3,1,1)$ og $C(1,3,-2)$.

a) Bestem vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$ på koordinatform.

$\overrightarrow{AB} = [3-(-2), 1-1, 1-2] = [5,0,-1]$

$\overrightarrow{BC} = [1-3, 3-1, -2-1] = [-2,2,-3]$

$\overrightarrow{AC} = [1-(-2), 3-1, -2-2] = [3,2,-4]$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = [5,0,-1] - 2[-2,2,-3] = [5,0,-1] - [-4,4,-6]$

$= [5-(-4), 0-4, -1-(-6)] \underline{\underline{= [9,-4,5]}}$

b) Regn ut vinkelen mellom $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$.

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2 = \sqrt{11}}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = [-2,12] \cdot [3,1,1] = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -3$

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-3}{3\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}$$

$\underline{\underline{\alpha \approx 107{,}5°}}$

c) Vis at planet α som går igjennom Punktene $A, B\ og\ C$ kan beskrives av likningen:

$$2x + 17y + 10z - 33 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$= \overrightarrow{e_x}(0 \cdot (-4) - (-1 \cdot 2)) - \overrightarrow{e_y}(5 \cdot (-4) - (-1 \cdot 3) + \overrightarrow{e_z}(5 \cdot 2 - 0 \cdot 3)$

$= 2\overrightarrow{e_x} + 17\overrightarrow{e_y} + 10\overrightarrow{e_z} = [2,17,10]$

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$2\big(x - (-2)\big) + 17(y - 1) + 10(z - 2) = 0$

$2x + 4 + 17y - 17 + 10z - 20 = 0$

$\underline{\underline{2x + 17y + 10z - 33 = 0}}$

d) Regn ut volumet av trekantpyramiden $ABCO$.

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6}|[2,17,10] \cdot [1,3,-2]| = \frac{1}{6}|2 \cdot 1 + 17 \cdot 3 + 10(-2)| = \underline{\underline{\frac{11}{2}}}$$

e)

Bestem en parameterframstilling for et plan β som står normalt på α og samtidig inneholder $\overrightarrow{OB}$.

$$\beta = \begin{cases} x = 2t \ \ + 3s + 0 \\ y = 17t + 1s + 0 \\ z = 10t + 1s + 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 2t \ \ + 3s \\ y = 17t + s \\ z = 10t + s \end{cases}$$

Oppgave 10

a)

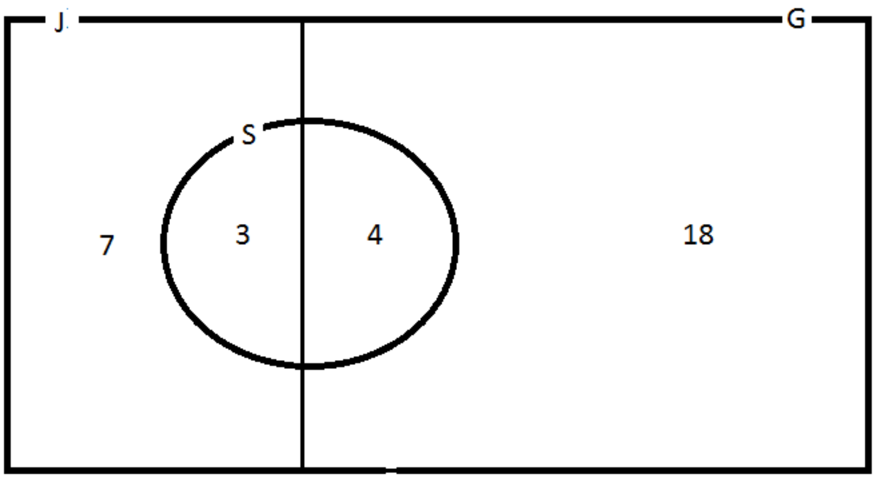
I en klasse er det 10 jenter og 22 gutter. Det er 7 elever som snuser. Av de 7 som snuser er det 3 jenter. Vi trekker ut en tilfeldig valgt elev fra klassen og definerer hendingene:

J : Eleven er ei jente

G : Eleven er en gutt

S : Eleven snuser

Tegn et venndiagram for hendelsene. Beskriv med ord hva vi mener med $P(S|G)$, $P(J|S)$, $P(G \cup S)$ og $P(G|\overline{S})$, beregne disse sannsynlighetene.



$P(S|G)$: Gitt at vi har en gutt. Sannsynligheten for at denne gutten snuser.

$$P(S|G) = \frac{4}{22} = \underline{\underline{\frac{2}{11}}}$$

$P(J|S)$: Gitt at vi har en snuser. Sannsynligheten for at denne snuseren er ei jente.

$$P(J|S) = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$$

$P(G \cup S)$: Sannsynligheten for at vi har en gutt eller en snuser.

$$P(G \cup S) = \underline{\underline{\frac{25}{32}}}$$

$P(G|\overline{S})$: Gitt at vi har en som ikke snuser. Sannsynligheten for at denne ikkesnuseren er en gutt.

$$P(G|\overline{S}) = \underline{\underline{\frac{18}{25}}}$$

b)

Per trekker tre kort fra en godt blandet kortstokk. (i en kortstokk er det 13 spar, 13 hjerter, 13 ruter og 13 kløver) Hva er sannsynligheten for at alle kortene er av samme valør? (3 spar eller 3 hjerter eller 3 ruter eller 3 kløver)

$S = spar$

$H = hjerter$

$R = ruter$

$K = kløver$

$$P(samme\ valør) = P(3S) + P(3H) + P(3R) + p(3K)$$

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} + \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} + \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} + \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \underline{\underline{\frac{22}{425} \approx 0{,}0518}}$$