Eksamen i matematikk forkurs 21. mai 2019

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Bestem den deriverte til funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{x} - 4x^2\sqrt{x}$$

LF: Siden $\sqrt{x} = x^{1/2}$ og $1/x = x^{-1}$ er funksjonen $f(x)$ lik

$$3 \cdot (1/x) - 4x^2 \cdot \sqrt{x} = 3x^{-1} - 4x^2 \cdot x^{1/2} = 3x^{-1} - 4x^{5/2}$$

Vi benytter nå at derivasjon er lineær og at den deriverte til x^r er lik rx^{r-1}. Den deriverte til $f(x)$ er lik

$$f'(x) = 3 \cdot (-1)x^{-2} - 4(5/2)x^{3/2} = \underline{\frac{-3}{x^2} - 10x\sqrt{x}}$$

b) Bestem den deriverte til funksjonen

$$g(x) = \frac{2x^3\cos(x) + 1}{5}$$

LF: Funksjonen er lik $(2/5)x^3\cos(x)+1/5$. Den deriverte til en konstant funksjon er null. Vi benytter at derivasjon er lineær samt produktregelen og får

$$g'(x) = (2/5)(3x^2\cos(x) + x^3(-\sin(x))) =$$

$$(6/5)x^2\cos(x) - (2/5)x^3\sin(x) = \underline{\frac{2x^2(3\cos(x) - x\sin(x))}{5}}$$

c) Bestem den deriverte til funksjonen

$$k(x) = \ln\left|\frac{x^3}{e^{2x-1}}\right|$$

LF: Vi kan skrive om funksjonen ved å benytte egenskaper til logaritmer og eksponentialfunksjoner. Dette vil gjøre det mye enklere å regne ut den deriverte

$$k(x) = \ln|\,x^3| - \ln e^{2x-1} = 3\ln|x| - (2x-1)$$

Her har vi benyttet at eksponentialfunksjonen alltid er positiv og at $|x^3| = |x|^3$. Den deriverte til denne funksjonen er lik

$$k'(x) = \underline{\frac{3}{x} - 2}$$

d) Hva må forholdet mellom høyden og radien i en sylinder med bunn, men uten lokk, være for at overflatearealet skal være minst mulig når volumet er 1 liter?

LF: La høyden være h og radien R. Da er volumet til sylinderen lik

$$V = \pi R^2 h$$

og overflatearealet er lik arealet til bunnflaten pluss overflateen til sylinderdelen

$$A = \pi R^2 + 2\pi R h$$

Uttrykket for volumet gir at $\pi R h$ er lik V/R. Vi benytter denne sammenhengen i uttrykket for overflatearealet og får overflatearealet uttrykt som en funksjon av R.

$$A(R) = \pi R^2 + 2V/R$$

Overflatearealet blir vilkårlig stort om R går mot null eller mot uendelig (h går mot null).

Vi deriverer $A(R)$ med hensyn til R og får

$$\frac{d}{dR}\left(\pi R^2 + 2V/R\right) = 2\pi R - \frac{2V}{R^2}$$

Setter vi inn $V = \pi R^2 h$ gir dette

$$A'(R) = 2\pi(R - h)$$

Den deriverte er negativ for $R < h$ og positiv for $R > h$. Derfor er arealet A minst når $R = h$. Vi har funnet at overflateareal, for et gitt volum (uavhengig av hva volumet er), er minst når forholdet $\underline{R/h \text{ er lik } 1}$.

Oppgave 2

a) Vis at 5 er en løsning til likningen

$$x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = 0$$

og faktoriser polynomet fullstendig.

LF: Lar vi x i polynomet være lik 5 får vi

$$5^3 - 2 \cdot 5^2 - 19 \cdot 5 + 20 = 125 - 50 + (-100 + 5) + 20 = 0$$

så 5 er et nullpunkt til polynomet. Siden $x - a$ deler et polyno $p(x)$ hvis og bare hvis $p(a) = 0$, så følger det at $x - 5$ deler polynomet vårt. Vi utfører polynomdivisjon og får

$$\begin{array}{l}
(\quad x^3 - 2x^2 - 19x + 20) : (x - 5) = x^2 + 3x - 4 \\
\underline{-x^3 + 5x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 - 19x \\
\qquad\quad \underline{-3x^2 + 15x} \\
\qquad\qquad\qquad -4x + 20 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\quad 4x - 20} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Polynomet $x^2 + 3x - 4$ faktoriseres som $(x - 1)(x + 4)$ siden $3 = 4 - 1$ og $-4 = (-1) \cdot 4$. Koeffisienten til x^3 er lik 1. Vi får da at polynomet $x^3 - 2x^2 - 19x + 20$ faktoriseres fullstendig som

$$\underline{x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = (x - 5)(x - 1)(x + 4)}$$

b) Løs likningen

$$(\ln x)^3 - \ln x^3 = \ln x$$

LF: Vi har at $\ln(x^3)$ er lik $3\ln(x)$. Derfor er likningen ekvivalent til

$$(\ln(x))^3 = 4\ln(x)$$

som igjen er ekvivalent til

$$(\ln(x))^3 - 4\ln(x) = \ln(x)((\ln(x))^2 - 4) = 0$$

Vi har løsning når $\ln(x)$ er lik $0, -2$ eller 2. Siden $\ln(x) = a$ er ekvivalent til $x = e^a$, så er løsningene e^{-2}, e^0 og e^2

$$\underline{x \in \{e^{-2}, 1, e^2\}}$$

c) Finn alle løsningene i intervallet $[-\pi, \pi]$ til likningen

$$\sin(2x) - \sin(x) = 0$$

LF: Vi benytter at $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ for alle x og får at likningen er ekvivalent til

$$\sin(x)(2\cos(x) - 1) = 0$$

Løsningene er de kombinerte løsningene til likningen $\sin(x) = 0$ og $\cos(x) = 1/2$. I intervallet er løsningene henholdsvis $-\pi, 0, \pi$ og $x = -\pi/3, \pi/3$. Løsningene er derfor

$$\underline{\{-\pi, -\pi/3, 0, \pi/3, \pi\}}$$

Alternativt kunne vi ha argumentert mer geometrisk. Løsningene er alle vinkler x i intervallet slik at andre-koordinaten til punktene på enhetssirkelen, som svarer til vinkelen og det dobbelte av vinkelen, skal være like.

Oppgave 3

a) Løs den doble ulikheten

$$x - 2 < 2x - 1 \leq x + 7$$

LF: Vi har to ulikheter. Løsningsmengden til den doble ulikhten er felles løsningsmengde til de to ulikhetene. Vi finner løsningene til hver av ulikhetene.

Ulikheten $x - 2 < 2x - 1$ er ekvivalent til ulikheten

$$-1 < x$$

ved å legge til $-x + 1$ til begge sider av ulikheten. Dette er alle x ekte større enn -1.

Ulikheten $2x - 1 \leq x + 7$ er ekvivalent til ulikheten $x \leq 8$ ved å legge til $-x + 1$ til begge sider av ulikheten.

Felles løsning til de to ulikhtene er derfor alle x slik at

$$\underline{-1 < x \leq 8}$$

Skrevet med mengdenotasjon er dette $\underline{x \in \langle -1, 8]}$.

b) Løs ulikhetene

$$\frac{2}{x-1} \geq x$$

LF: Vi samler alle uttrykkene på venstre side av ulikhetstegnet ved å legge til $-x$ til begge sider av ulikheten. Dette gir den ekvialente ulikheten

$$\frac{2}{x-1} - x \geq 0$$

Vi finner en felles nevner til uttrykkene

$$\frac{2 - x(x-1)}{(x-1)} = \frac{-(x^2 - x - 2)}{x-1} \geq 0$$

Vi ser at $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Ulikheten er derfor ekvivalent til

$$\frac{-(x-2)(x+1)}{x-1} \geq 0$$

Uttrykket $-(x-2)(x+1)/(x-1)$ skifter fortegn i $-1, 1$ og 2 (det er ikke definert i 1). Siden uttrykket er negativt for $x > 2$ så er løsningen til likningen alle x ekte større enn 1 og mindre eller lik 2 samt alle x ekte mindre enn eller lik -1. Ved bruk av notasjonen for mengder er løsningen

$$\underline{x \in \langle \infty, -1] \cup \langle 1, 2]}$$

Oppgave 4

Avgjør om følgende geometriske rekke konvergerer og finn summen hvis den konvergerer

$$\frac{3}{e} - \left(\frac{e}{3}\right)^2 + \left(\frac{e}{3}\right)^5 - \left(\frac{e}{3}\right)^8 + \left(\frac{e}{3}\right)^{11} - \cdots$$

LF: Kvotienten til den geometriske rekken er $-(e/3)^3 \approx -0.74391$. Siden kvotienten har absoluttverdi ekte mindre enn 1 så konvergerer rekken. Summen til rekken er lik

$$\frac{3}{e} \cdot \frac{1}{1 - (-(e/3)^3)} = \underline{\frac{3^4}{3^3 e + e^4} \approx 0.63285}$$

Oppgave 5

a) Regn ut det bestemte integralet

$$\int_{-2}^{2} (4x^3 - 2x^2 + 6x + e^2)\, dx$$

LF: Integralet av en odde funksjon (som har egenskapen $f(-x) = -f(x)$) fra $-a$ til a er alltid lik null. Siden $4x^3 + 6x$ er en odde funksjon er derfor integralet lik $\int_{-2}^{2} -2x^2 + e^2\, dx$. Den antideriverte til x^2 er lik $x^3/3$. Funksjonen e^2 er bare en konstant funksjon så den antideriverte er lik $e^2 x$. Ved fundamentalteoremet i kalkulus er derfor det bestemte integralet lik

$$(-2x^3/3 + e^2 x)\,|_{-2}^{2} = -2 \cdot 2^3 + e^2 2 - (-2 \cdot (-2)^3 + e^2(-2)) =$$

$$2(-2^4 + 2e^2) = \underline{-32 + 4e^2 \approx -2.4438}$$

b) Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\, dx$$

LF: Siden $\cos(x)$ er lik den deriverte til $\sin(x)$, så er integranden (funksjonen som skal integreres) lik $u'(x) \cdot u(x)^{-2}$ hvor $u(x) = \sin(x)$. Vi benytter derfor substitusjon

$$\int u'(x) \cdot u(x)^{-2}\, dx = \int u^{-2}\, du = u^{-1}/(-1) + c = \underline{\frac{-1}{\sin(x)} + c}$$

c) Bestem volumet til rotasjonslegemet som fremkommer ved å rotere området mellom x-aksen og grafen til $y = e^x$, fra $x = 0$ til $x = 1$, om x-aksen.

LF: Volumet til rotasjonslegemet finner vi ved å integrere tverrsnittarealene fra $x = 0$ til $x = 1$. Tverrsnittarealet er lik $\pi(e^x)^2 = \pi e^{2x}$. Volumet er derfor lik

$$\int_0^1 \pi e^{2x}\, dx = \pi e^{2x}/2|_0^1 = \underline{\pi(e^2 - 1)/2 \approx 10.036}$$

d) Løs initialverdiproblemet

$$(y^2 - 1)y' = 3(y + 1)$$

hvor $y(1) = 2$.

LF: Dette er en separabel differensiallikning. Vi ser at $y(x)$ identisk lik -1 er en løsning til differensiallikningen siden begge sider av likningen da blir lik null. For $y \neq -1$ er differensiallikningen ekvivalent til

$$\frac{y^2 - 1}{y + 1} \cdot y' = 3$$

Siden uttrykkene på venstre og høyre side av likhetstegnet skal være like, vil også klassen av andideriverte med hensyn til x være like. Substitusjon gir da

$$\int \frac{y^2 - 1}{y + 1}\, dy = \int \frac{y^2 - 1}{y + 1} y'\, dx = \int 3\, dx = 3x + C_2$$

Polynomet $y^2 - 1$ faktoriseres som $(y + 1)(y - 1)$ (konjugatsetningen). Derfor er

$$\int \frac{y^2 - 1}{y + 1}\, dy = \int (y - 1)\, dy = \frac{y^2}{2} - y + C_1$$

(forutsatt $y \neq -1$). Vi får derfor at $y(x)$ må tilfredstille likningen

$$\frac{y^2}{2} - y + C_1 = 3x + C_2$$

Dette er et annengradsuttrykk i y

$$\frac{y^2}{2} - y - (3x + C) = 0$$

Vi har her kombinert konstantene til $C = C_2 - C_1$. Vi kan benytte anndregradsformelen til å finne et uttrykk for y

$$y(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1/2)(-(3x + C))}}{2 \cdot (1/2)} = 1 \pm \sqrt{1 + 6x + 2C}$$

Løsningene er derfor på formen

$$1 + \sqrt{6x + K} \quad \text{og} \quad 1 - \sqrt{6x + K}$$

for en konstant K.

Vi løser nå initialbetingelsen $y(1) = 2$. Løsningen må da være på formen $1 + \sqrt{6x + K}$ (siden $1 - \sqrt{6x + K} \leq 1$ for alle gyldige x). Vi setter inn $x = 1$ og $y = 2$ og får

$$2 = 1 + \sqrt{6 + K}$$

Dette gir $K = -5$. Løsningen er derfor lik

$$\underline{y(x) = 1 + \sqrt{6x - 5}}$$

Vi sjekker svaret. Den deriverte er lik

$$y'(x) = 6/(2\sqrt{6x - 5}) = \frac{3}{\sqrt{6x - 5}}$$

Etter at vi har kanselsert ut faktoren $(y + 1)$ er differensiallikningen $(y - 1)y' = 3$. Dette stemmer.

Oppgave 6

Finn alle rettvinkla trekanter hvor to av sidene har lengde 5 og 12. I hvert tilfelle bestem lengden til den tredje siden og bestem vinklene i trekantene.

LF: Det er to muligheter

1) Hypotenus har lengde 12
2) De to katetene har lengde 5 og 12.

I tilfelle 1) har den andre kateten lengde

$$\sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{144 - 25} = \sqrt{110} \approx 10.909$$

Vinkelen mellom siden av lengde 5 og 12 er lik $\arccos(5/12) \approx 65.376$ grader. Den andre ikke-rette vinklen er da lik $90 - 65.376 = 24.624$ grader.

I tilfelle 2) har hypotenusen lengde

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Vinkelen mellom sidenene av lengde 5 og 13 er lik $\arccos(5/13) \approx 67.380$ grader. Vinkelen mellom sidene av lengde 12 og 13 er lik $90 - 67.380 = 22.620$ grader.

Oppgave 7

Gitt tre punkt i rommet, $A(0,-1,2)$, $B(-3,2,-1)$ og $C(1,2,-3)$.

a) Bestem vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

LF: Vektoren $\overrightarrow{AB}$ er lik

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{O}B} - \overrightarrow{\mathcal{O}A} = [-3,2,-1] - [0,-1,2] = [-3,3-3]$$

hvor $\mathcal{O}$ er origo. Tilsvarende finner vi

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\mathcal{O}C} - \overrightarrow{\mathcal{O}A} = [1,2,-3] - [0,-1,2] = [1,3,-5]$$

b) Vis at planet β som går gjennom punktene A, B og C er gitt som løsningene til likningen

$$x + 3y + 2z - 1 = 0$$

Finn også arealet til trekanten ABC.

LF: Kryssproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ står vinkelrett på planet som inneholder A, B og C (de ligger ikke alle på en linje). Vi regner ut kryssproduktet.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-3,3-3] \times [1,3,-5] = 3[-1,1,-1] \times [1,3,-5] =$$

$$3\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 3[-2,-6,-4] = -6[1,3,2]$$

Arealet til trekanten ABC er lik

$$\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = (6/2)\sqrt{1^2+3^2+2^2} = \underline{3\sqrt{14} \approx 11.225}$$

Vektoren $[1,3,2]$ står vinkelrett på planet og punktet $A(0,-1,2)$ ligger i planet. Et punkt (x,y,z) ligger derfor i planet hvis og bare hvis vektoren fra A til (x,y,z) står vinkelrett på vektoren $[1,3,2]$ (eller er lik nullvektoren). Dette svarer til at skalarproduktet mellom vektorene er lik null

$$([x,y,x] - [0,-1,2]) \bullet [1,3,2] = 0$$

Dette gir likningen $x + 3y + 2z - 1 = 0$.

c) Bestem koordinaten til punktet Q i planet β som har kortest avstand til punktet $E(1,1,2)$.

LF: Punktet i planet β som ligger nærmest punktet $E(1,1,2)$ er snittpunktet S mellom planet β og linjen gjennom punktet E som er parallell til normalvektoren $[1,3,2]$.

Vi forklarer hvorfor S er punktet i planet nærmest E: For alle andre punkt Q i planet får vi en rettvinklet trekant hvor hypotenus er QE og en av katetene er siden SE.

Linjen er parametrisert ved $[x,y,z] = [1,1,2] + t[1,3,2]$. Vi setter dette inn i likningen for planet og løser for parameteren t

$$(1+t) + 3(1+3t) + 2(2+2t) - 1 = 7 + 14t = 0$$

så $t = -1/2$. Vi setter dette inn igjen i parametriseringen av linjen og finner punktet S i planet

$$\overrightarrow{OS} = [1,1,2] + (-1/2)[1,3,2] = [1/2, -1/2, 1]$$

så punktet S i planet nærmest E har koordinater $\underline{(1/2, -1/2, 1)}$.

Oppgave 8

a) I en klasse er det 10 jenter og 15 gutter. Det skal trekkes ut to elever som skal være klasserepresentanter. Hva er sannsynligheten for at begge elevene som trekkes ut er jenter og hva er sannsynligheten at begge elevene som trekkes ut er gutter? Regn også ut sannsynlighten for at begge elevene er gutter hvis vi vet at resultatet av trekningen er at begge elevene har samme kjønn.

LF: Det er totalt 25 elever i klassen Sannsynligheten for å trekke to jenter er

$$\frac{10}{25}\frac{9}{24} = \frac{9 \cdot 10}{24 \cdot 25} = \frac{3}{20} = \underline{15\%}$$

Sannsynligheten for å trekke to gutter er

$$\frac{15}{25}\frac{14}{24} = \frac{14 \cdot 15}{24 \cdot 25} = \frac{7}{20} = \underline{35\%}$$

(Sannsynligheten for at det trekkes akkurat én av hvert kjønn er da $100 - 15 - 35 = 50$ prosent.)

Den betinga sannsynligheten for at begge er gutter, hvis vi vet at det blir trekt enten to jenter eller to gutter, er lik sannsynligheten for at det trekkes to gutter delt på sannsynligheten for at begge de trekte har samme kjønn

$$\frac{35\%}{50\%} = \underline{70\%}$$

b) Vi kaster to rettferdige terninger. Regn ut sannsynligheten til følgende hendelser:

S Summen av terningene er sju eller mer.

T Den ene terningen viser et oddetall og den andre et partall.

Er hendingene S og T uavhengige? Hvis ikke, vil hendelse S gjøre hendelse T mer eller mindre sannsynlig?

LF: Det er totalt $6 \times 6 = 36$ mulige utfall. Alle er like sannsynlige. Sannsynligheten for at summen av terningene er lik n for $n = 2$ til $n = 12$ er gitt ved $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ ganget med $1/36$. (Dette fremkommer ved å telle opp mulige terningkombinasjoner.) For eksempel er utfallene som gir sum lik 7

$$\{(1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)\ (6,1)\}$$

Sannsynligheten for å få minst sju er derfor lik

$$P(S) = (1+2+3+4+5+6)/36 = \frac{7 \cdot 6/2}{36} = \frac{7}{12}$$

Sannsynligheten for T (summen er da 3, 5, 7, 9 eller 11) er

$$P(T) = (2+4+6+2+4)/36 = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Sannsynligheten for å få minst sju hvor akkurat en av terningene viser et oddetall (summen er da 7, 9, 11) er

$$P(S \cap T) = (2+4+6)/36 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Dette er forskjellig fra

$$P(S) \cdot P(T) = 7/24 < 1/3$$

Den betinga sannsynligheten

$$P(T|S) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{1/3}{7/12} = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}$$

så hendelse S, summen er minst sju, gjør hendelse T, at summen er et oddetall, mer sannsynlig.