Løsningsforslag kontinuasjonseksamen Høst 2020.

Oppgave 1

a) Vi løser opp parentesen

$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{5} = -\frac{1}{3}(x+9) - \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{5} = -\frac{1}{3}x - 3 - \frac{1}{5} \qquad |\cdot 15$$

$$10x + 12 = -5x - 45 - 3 \qquad | + 5x - 12$$

$$10x + 5x = -45 - 3 - 12$$

$$15x = -60$$

$$x = -4$$

b) Vi tar første likninga i systemet

$$\begin{cases} h + 40 = 0 \\ h = 10t - 5t^2 \end{cases}$$

og setter den inn i den andre og får $-40 = 10t - 5t^2$. Dette er en andregradslikning, som også kan skrives

$$5t^2 - 10t - 40 = 0.$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0.$$

Andregradsformelen gir

$$t_{\pm} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2},$$

altså $t = -2$ eller $t = 4$. Vi har fra den første likninga at $h = -40$ vi får

$$t = -2 \text{ og } h = -40, \text{ eller } t = 4 \text{ og } h = -40.$$

c) Legg merke til at venstre side i likninga aldri kan bli mindre enn -2, mens høyre side er -3. Likninga har dermed ingen løsning.

Vi kan også prøve å løse likninga og komme fram til samme konklusjon. Trekk fra x på begge sider og kvadrer

$$\left(2\sqrt{x+2}\right)^2 = (-3-x)^2$$

$$4(x+2) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

Vi setter inn i likninga for å se om den potensielle løsninga er en faktisk løsning.

Venstre side gir $-1 + 2\sqrt{-1+2} = -1 + 2 = 1$, mens høyre side er -3. Venstre side og høyre side er ulike så det er ingen løsning.

d) Legg merke til at $3 = \lg 1000$, så vi har

$$\lg(3x+7) = \lg 1000$$

$$3x + 7 = 1000$$

$$x = 331$$

e) Vi deler på 7 og tar den naturlige logaritmen av begge sider

$$7e^{-x-3} = 5$$

$$-x - 3 = \ln\frac{5}{7}$$

$$x = 3 - \ln\frac{5}{7} = 3 + \ln\frac{7}{5}.$$

f) Ved å trekke fra $\sqrt{3}$ på begge sider, og dele på 2 får vi

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Siden $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ er en eksakt verdi for sin vil

$$\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ eller } \frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{6} = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + n \cdot 2\pi.$$

Vi løser for x og får

$$x = -\frac{2}{3} + n \cdot 8 \text{ eller } x = 6 + n \cdot 8.$$

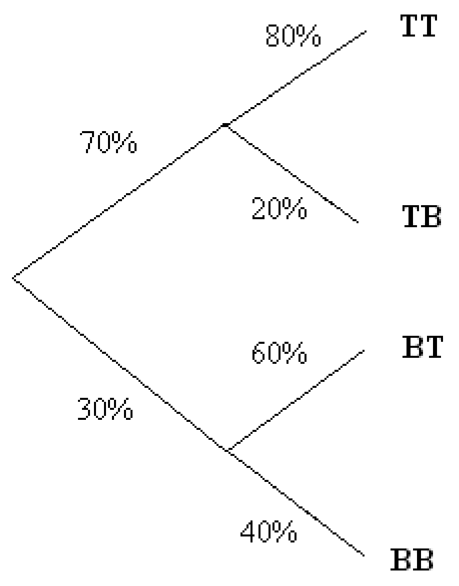
Siden $x \in [-4{,}8]$ får vi løsningene $x = -\frac{4}{3}$, $x = 6$, eller $x = \frac{22}{3}$.

Oppgave 2

$P(2\ \text{treff}) = 0.70 \cdot 0.80 \underline{\underline{= 0.56}}$

$P(1\ \text{treff}) = 0.70 \cdot 0.20 + 0.30 \cdot 0.60 \underline{\underline{= 0.32}}$

$P(0\ \text{treff}) = 0.30 \cdot 0.40 \underline{\underline{= 0.12}}$



Oppgave 3

a)

$\overrightarrow{AB} = [0-1, 3-1, 1-0] \underline{\underline{= [-1,2,1]}}$

$\overrightarrow{BC} = [0-0, 0-3, 2-1] = [0,-3,1]$

$\overrightarrow{AC} = [0-1, 0-1, 2-0] = [-1,-1,2]$

$$3\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 3[-1,2,1] - \frac{1}{2}[0,-3,1] = [-3,6,3] - \left[0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$$
$$= \left[-3 - 0, 6 + \frac{3}{2}, 3 - \frac{1}{2}\right] \underline{\underline{= \left[-3, \frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right]}}$$

b)

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = [1,-2,-1]$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = [1,-2,-1] \cdot [0,-3,1] = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 = 5$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = 0.645 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{B = 49.8°}}$$

c)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-1,2,1] \times [-1,-1,2] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1), -\big((-1) \cdot 2 - 1 \cdot (-1)\big), (-1)(-1) - 2(-1)\right] = [5,1,3]$$

Normalvektor til planet $= [5,1,3]$ og punkt i planet $A(1,1,0)$

Likning for plan: $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$5(x - 1) + 1(y - 1) + 3(z - 0) = 0$

$\underline{\underline{5x + y + 3z - 6 = 0 \quad \text{er en likning for planet}}}$

d)

D får koordinatene $(0,0,z)$

$\overrightarrow{BD} = [0 - 0, 0 - 3, z - 1] = [0, -3, z - 1]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$[-1,2,1] \cdot [0, -3, z - 1] = 0$

$-1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 1(z - 1) = 0$

$0 - 6 + z - 1 = 0$

$z = 7$

$\underline{\underline{\text{Koordinatene til D blir } (0,0,7)}}$

e)

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(1(3 \cdot 2 - 0 \cdot 1) - 1(0 \cdot 2 - 0 \cdot 1) + 0(0 \cdot 0 - 0 \cdot 3) \underline{\underline{= 1}}$$

Oppgave 4

a) Produktregelen gir

$$f'(x) = (x)' \tan x + \ x(\tan x)'$$
$$= \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cos x + x}{\cos^2 x}$$

b) Kjerneregelen gir

$$g'(t) = 5\left(e^{t^3+2t}\right)' \cdot (t^3 + 2t)'$$
$$= 5e^{t^3+2t} \cdot (3t^2 + 2)$$

c) Kvotientregelen gir

$$h(x) = \frac{(\ln x)'\sqrt{x} - \ln x \left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x \ \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{2}\ln x}{x\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1 - \ln\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

Oppgave 5

$$f(x) = \frac{1}{10}e^x \sin(\pi x)\,, \qquad x \in [0,3]$$

a) $f(x) = 0$

$\frac{1}{10}e^x \sin(\pi x) = 0$

Produktregelen gir $\frac{1}{10}e^x \neq 0 \ \vee \ \sin(\pi x) = 0$

Kalkulator: $\pi x = \sin^{-1} 0 = 0$

Alternativt: $\pi x = \pi - \sin^{-1} 0 = \pi - 0 = \pi$

Generelle løsning: $\pi x = 0 + n \cdot 2\pi \ \wedge \ \pi x = \pi + n \cdot 2\pi \ \Longrightarrow \pi x = n \cdot \pi$

Dividerer generell løsning med π:

$x = n$

Heltall innenfor definisjonmengden:

$x \in \{0,1,2,3\}$

b) $f'(x) = \left(\frac{1}{10}e^x \sin(\pi x)\right)'$

$$= \frac{1}{10}e^x \sin(\pi x) + \frac{1}{10}e^x(\pi\cos(\pi x)) = \frac{1}{10}e^x(\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x))$$

q.e.d.

$$f''(x) = \left(\frac{1}{10}e^x(\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x))\right)'$$

$$= \frac{1}{10}e^x(\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x)) + \frac{1}{10}e^x(\pi\cos(\pi x) - \pi^2\sin(\pi x))$$

$$= \frac{1}{10}e^x\big((1-\pi^2)\sin(\pi x) + 2\pi\cos(\pi x)\big)$$

q.e.d.

c) $f'(x) = 0$

$\frac{1}{10}e^x(\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x)) = 0$

Produktregelen gir $\frac{1}{10}e^x \neq 0 \ \vee \ \sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x) = 0$ $|: \cos(\pi x)$

$\tan(\pi x) = -\pi$

Kalkulator: $\pi x = \tan^{-1}(-\pi) \approx -1{,}26$

Generelle løsning: $\pi x \approx -1{,}26 + n \cdot \pi$

Dividerer generell løsning med π:

$x \approx -0{,}4 + n$

Løsninger når n = 1, 2 og 3

$x \in \{0.6, 1.6, 2.6\}$

Tilhørende y-verdier: $y \in \{0.17, -0.47, 1.28\}$

Fortegnsskjema:

		0,6		1,6		2,6		x
$\frac{1}{10}e^x$	+	+	+	+	+	+	+	
$\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x)$	+	0	−	0	+	0	−	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	

Avlest fra fortegnsskjemaet:

$f(x)$ vokser for $x \in [0, 0.6\rangle \cup \langle 1.6, 2.6\rangle$

$f(x)$ minker for $x \in \langle 0.6, 1.6\rangle \cup \langle 2.6, 3]$

Toppunkt i (0.6, 0.17) og (2.6, 1.28)

Bunnpunkt i (1.6, -0.47)

d) $f''(x) = 0$

$$\frac{1}{10}e^x\big((1-\pi^2)\sin(\pi x) + 2\pi\cos(\pi x)\big) = 0$$

Produktregelen gir $\frac{1}{10}e^x \neq 0 \lor (1-\pi^2)\sin(\pi x) + 2\pi\cos(\pi x) = 0$

$|: 2\pi\cos(\pi x)$

$$\tan(\pi x) = \frac{\pi^2 - 1}{2\pi}$$

Kalkulator: $\pi x = \tan^{-1}\left(\frac{\pi^2-1}{2\pi}\right) \approx 0{,}95$

Generelle løsning: $\pi x \approx 0{,}95 + n \cdot \pi$

Dividerer generell løsning med π:

$x \approx 0{,}3 + n$

Løsninger når n = 0, 1 og 2

$x \in \{0.3, 1.3, 2.3\}$

Tilhørende y-verdier: $y \in \{0.11, -0.30, 0.81\}$

Fortegnsskjema:

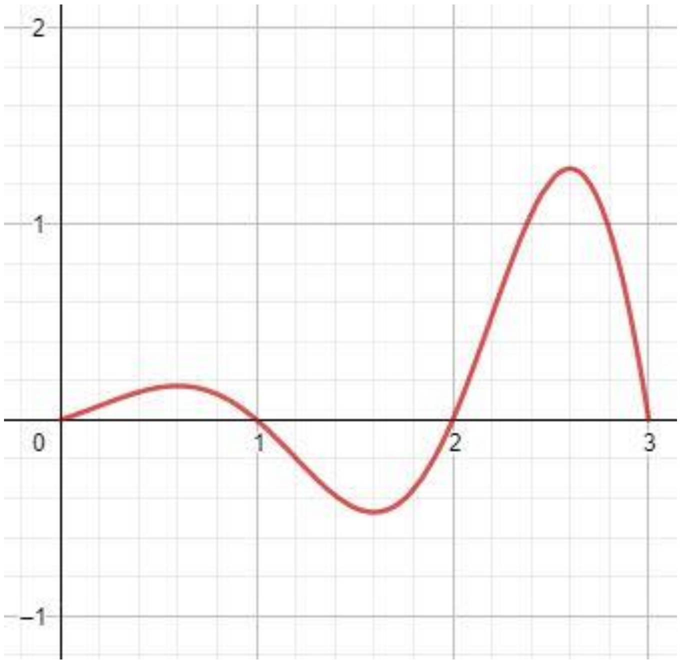
x		0,3		1,3		2,3	
$\frac{1}{10}e^x$	+	+	+	+	+	+	+
$(1-\pi^2)\sin(\pi x) + 2\pi\cos(\pi x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

Avlest fra fortegnsskjemaet:

$f(x)$ vender oppover for $x \in [0, 0.3\rangle \cup \langle 1.3, 2.3\rangle$

$f(x)$ vender nedover for $x \in \langle 0.3, 1.3\rangle \cup \langle 2.3, 3]$

Vendepunkt i (0.3, 0.11), (1.3, -0.30) og (2.3, 0.81)



e) Avlest fra grafen til $f(x) = \frac{1}{10}e^x \sin(\pi x)$: $V_f = [-0.46, 1.28]$

Oppgave 6

b) Polynomdivisjon av integranden gir

$$\frac{4x^2+4x+2}{2x-1} = 2x+3+\frac{5}{2x-1}.$$

Dermed får vi

$$\int \frac{4x^2+4x+2}{2x-1}\,dx = \int \left(2x+3+\frac{5}{2x-1}\right) dx$$

$$= 2\int x\,dx + 3\int 1\,dx + 5\int \frac{1}{2x-1}\,dx$$

$$= x^2+3x+\frac{5}{2}\ln|2x-1| + C$$

a)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u}\,du = {}_{u_1}^{u_2}[\ln|u|] = {}_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}[\ln|\sin x|] = \ln\left|\sin\frac{2\pi}{3}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|$$

$$= \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln 1$$

$$= \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Polynomdivisjon av integranden gir

$$\frac{4x^2 + 4x + 2}{2x - 1} = 2x + 3 + \frac{5}{2x - 1}.$$

Dermed får vi

$$\int \frac{4x^2 + 4x + 2}{2x - 1} dx = \int \left(2x + 3 + \frac{5}{2x - 1}\right) dx$$

$$= 2 \int x\, dx + 3 \int 1\, dx + 5 \int \frac{1}{2x - 1} dx$$

$$= x^2 + 3x + \frac{5}{2} \ln|2x - 1| + C$$

c) Grenser for arealet: $f(x) = g(x)$

$$2x^2 - 2x + 3 \;=\; -x^2 + 4x + 3$$

$$2x^2 - 2x + 3 + x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \;\vee\; x_2 = 2$$

g(x) ≥ f(x) på intervallet [0,2] da g(1) = 6 og f(1) = 3

A = $\int_0^2 (\mathrm{g(x)} - \mathrm{f(x)}) dx = \int_0^2 ((-x^2 + 4x + 3) - (2x^2 - 2x + 3)) dx$

= $\int_0^2 (-3x^2 + 6x) dx = {}_0^2[-x^3 + 3x^2]$

= $(-2^3 + 3 \cdot 2^2) - (-0^3 + 3 \cdot 0^2)$

= $-8 + 12 - 0 = 4$

Oppgave 7

a)

$$a_8 = a_1 + 7d = \frac{8}{3}$$

$$a_{27} = a_1 + 26d = 9$$

$$\begin{array}{r} a_1 \ \ + 7d = \frac{8}{3} \\ \underline{-a_1 - 26d = -9} \\ -19d = -\frac{19}{3} \\ \underline{\underline{d = \frac{1}{3}}} \end{array}$$

$$a_1 = \frac{8}{3} - 7 \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$S_{40} = \left(a_1 + \frac{n-1}{2} \cdot d\right) \cdot n = \left(\frac{1}{3} + \frac{40-1}{2}\right) \cdot 40 = \underline{\underline{\frac{2380}{3}}}$$

b)

$$k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

$$-1 < k < 1$$

$$-1 < \frac{x^2 - 2}{x^2} < 1$$

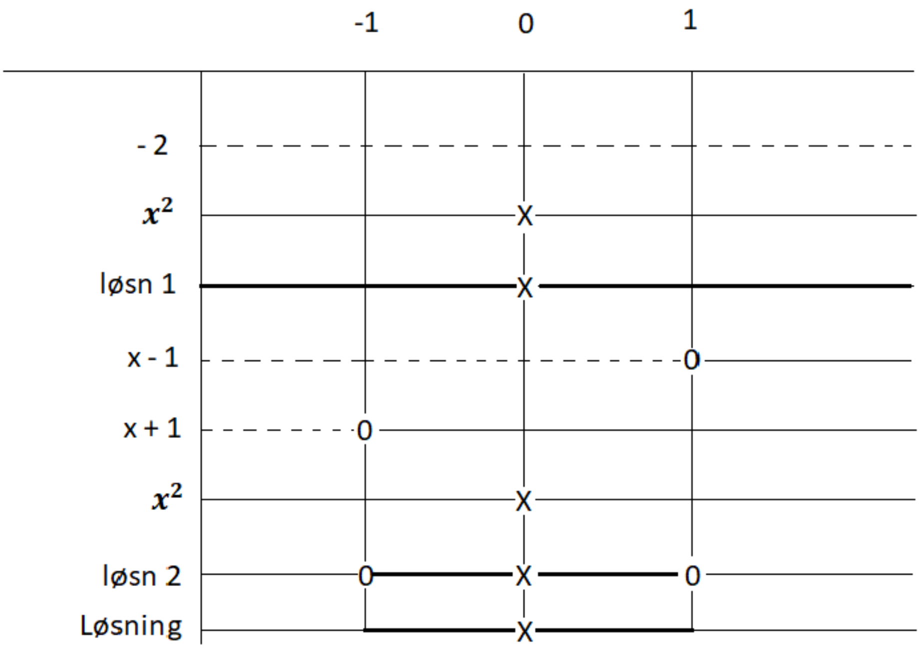
$$-1 < \frac{x^2 - 2}{x^2} \qquad\qquad \frac{x^2 - 2}{x^2} < 1$$

$$0 < \frac{x^2 - 2}{x^2} + 1 \qquad\qquad \frac{x^2 - 2}{x^2} - 1 < 0$$

$$0 < \frac{x^2 - 2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \qquad\qquad \frac{x^2 - 2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} < 0$$

$$0 < \frac{2x^2 - 2}{x^2} \qquad\qquad \frac{-2}{x^2} < 0$$

$$0 < \frac{2(x-1)(x+1)}{x^2} \qquad\qquad \frac{-2}{x^2} < 0$$



$\underline{\underline{L = \langle -1,0 \rangle \cup \langle 0,1 \rangle}}$