# Løsningsforslag eksamen vår 2021

## Oppgave 1

Husk at den deriverte til en funksjon forteller om stigningstallet til funksjonen. Spesielt vil et topp-/bunnpunkt ha derivert lik null der. For grafen til q(x) så har den bunn- og toppunkt for henholdsvis $x \approx -1$, og $x \approx 1$. Ingen av de andre grafene har nullpunkter der. Derfor må q(x) være den dobbeltderiverte.
Siden q(x)<0 for x<0, må q(x) være den deriverte til p(x), som igjen er den deriverte til r(x).

Derfor: $\underline{\underline{f(x) = r(x), f'(x) = p(x), f''(x) = q(x).}}$

## Oppgave 2

$$\int_1^e \frac{a}{x}\, dx = 2$$

$$[aln|x|]_1^e = 2$$

$$a[ln|x|]_1^e = 2$$

$$a(ln|e| - ln|1|) = 2$$

$$a(1 - 0) = 2$$

$$\underline{\underline{a = 2}}$$

## Oppgave 3

Gitt den geometriske rekka

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} + \sin x + \cdots$$

a) Vis at koeffisienten, $k = 2\cos\frac{x}{2}$, til den geometriske over. Vis at $k$ er den samme mellom $a_1$ og $a_2$, samt mellom $a_2$ og $a_3$.

$$k = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}} = 2 \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{2}$$

Og

$$k = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{2}$$

$q.e.d.$

b) For hvilke verdier av $x$ konvergerer rekka? La $x \in [0, 4\pi\rangle$.
Rekka konvergerer når $-1 < k < 1$
Vi legger merke til at vi ikke kan tillate $\cos\frac{x}{2} = 0$ fordi da eksisterer ikke det første leddet i rekka. Altså $x \neq \pi + n \cdot 2\pi$.

$$-1 < 2\cos\frac{x}{2} < 1$$

$$-\frac{1}{2} < \cos\frac{x}{2} < \frac{1}{2}$$

$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

Kalkulatorløsning:

$\frac{x}{2} = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

Alternativløsning:

$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3}$

Generell løsning:

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \ \vee \ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 4\pi \ \vee \ x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 4\pi$

$n = 0: x = \frac{2\pi}{3} \ \vee x = -\frac{2\pi}{3} \ (utenfor\ oppgitt\ område)$

$n = 1: x = \frac{14\pi}{3} \ (utenfor\ oppgitt\ område) \vee x = \frac{10\pi}{3}$

$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$

Kalkulatorløsning:

$$\frac{x}{2} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Alternativløsning:

$$\frac{x}{2} = -\frac{2\pi}{3}$$

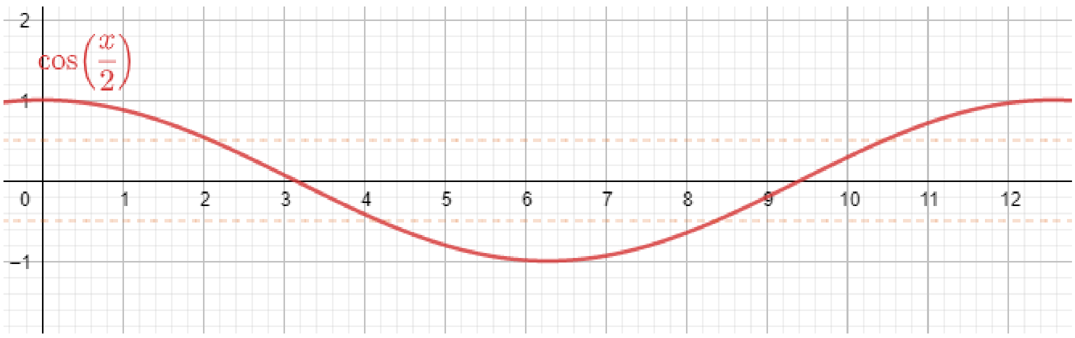
Generell løsning:

$$\frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \;\vee\; \frac{x}{2} = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 4\pi \;\vee\; x = -\frac{4\pi}{3} + n \cdot 4\pi$$

$$n = 0: x = \frac{4\pi}{3} \;\vee x = -\frac{4\pi}{3}\ (utenfor\ oppgitt\ område)$$

$$n = 1: x = \frac{16\pi}{3}\ (utenfor\ oppgitt\ område) \vee x = \frac{8\pi}{3}$$



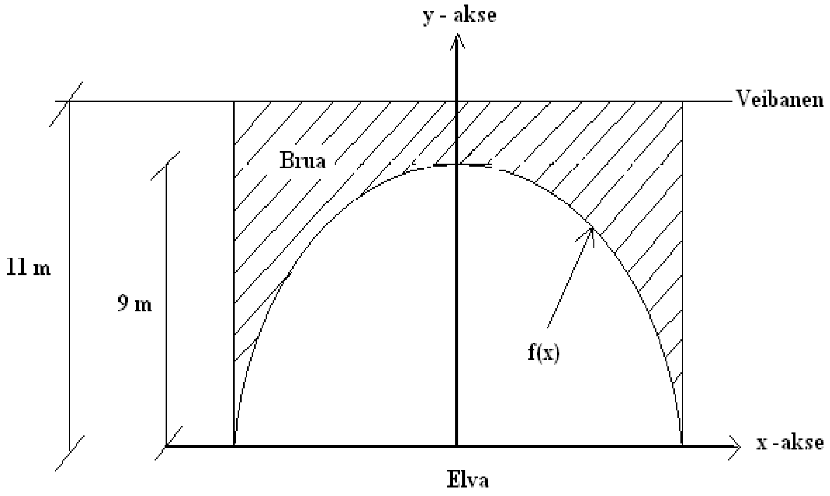

Avlest fra grafen til $\cos\frac{x}{2}$:

Rekka konvergerer $\left(-\frac{1}{2} < \cos\frac{x}{2} < \frac{1}{2}\right)$ når $x \in \langle\frac{2\pi}{3}, \pi\rangle \cup \langle\pi, \frac{4\pi}{3}\rangle \cup \langle\frac{8\pi}{3}, 3\pi\rangle \cup \langle 3\pi, \frac{10\pi}{3}\rangle$

c) Finn summen av rekka når $x = \frac{5\pi}{6}$.

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{1}{2}\tan\frac{5\pi}{12}}{1 - 2\cos\frac{5\pi}{12}} \approx 3{,}87$$

Oppgave 4




a)

$$f(x) = -0{,}09x^2 + 9 = 0$$
$$-0{,}09x^2 = -9$$
$$x^2 = \frac{-9}{-0{,}09} = 100$$
$$x = \pm 10$$

Bredden av brua $= 2 \cdot 10\text{m} \underline{\underline{= 20\text{m}}}$

b)

$$\int_{-10}^{10} (11 - (-0{,}09x^2 + 9))dx = \int_{-10}^{10} (0{,}09x^2 + 2)\, dx = \left[\frac{0{,}09}{3}x^3 + 2x\right]_{-10}^{10}$$
$$= [0{,}03x^3 + 2x]_{-10}^{10}$$

$$= 0{,}03 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 - (0{,}03(-10)^3 + 2(-10) = 100$$

$\underline{\underline{\text{Overflaten er } 100\ \text{m}^2}}$

c)

$$f(6) = -0{,}09 \cdot 6^2 + 9 = 5{,}76$$

$$5{,}76m \rangle 5{,}5m$$

$\underline{\underline{\text{Lekteren passerer under brua.}}}$

d)

$$A(x) = 2 \cdot x \cdot f(x) = 2 \cdot x \cdot (-0{,}09x^2 + 9) \underline{\underline{= 18x - 0{,}18x^3 \quad QED}}$$

e)

$$A'(x) = 18 - 3 \cdot 0{,}18x^2 = 18 - 0{,}54x^2$$

$$A''(x) = -2 \cdot 0{,}54x = -1{,}08x$$

$$A'(x) = 0$$
$$18 - 0{,}54x^2 = 0$$
$$x^2 = \frac{18}{0{,}54} = 33{,}3$$
$$x = \sqrt{33{,}3} = 5{,}77$$

$$A''(x) = -1{,}08 \cdot 5{,}77 = -6{,}23 \langle\ 0 \quad makspunkt$$

$$\underline{\underline{\text{Bredde x} = 2 \cdot 5{,}77\text{m} = 11{,}54\text{m gir størst mulig areal}}}$$

## Oppgave 5

a) Arealet av flatestykket er:

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = [1/2(e^x - e^{-x})]_{-1}^{1} = \underline{\underline{e - e^{-1}}}$$

b) Volum av omdreiningslegme:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(F(x)\right)^2 dx$$

c) For funksjonen gitt i oppgaven har vi:

$$\left(F(x)\right)^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$

Dermed:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})}}$$

Med desimaler: $V \approx \underline{\underline{8{,}839}}$

# Oppgave 6

a) $\overrightarrow{CA} = [0-2, 0-4, 0-0] = \underline{\underline{[-2,-4,0]}}.$

$\overrightarrow{CB} = [3-2, 1-4, 0-0] = \underline{\underline{[1,-3,0]}}.$

La $\theta = \angle ACB$. Da er

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cos\theta.$

Dette gir:

$$(-2)\cdot 1 + (-4)(-3) + 0 = \sqrt{4+16}\cdot\sqrt{1+9}\,cos\,\theta$$
$$10 = \sqrt{20}\sqrt{10}\,cos\,\theta$$
$$10 = 10\sqrt{2}\,cos\,\theta$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = cos\,\theta$$
$$\theta = \underline{\underline{\angle ACB = 45^\circ}}$$

b) $\triangle ABC$ er i xy-planet. Dermed er z-koordinaten til $T$ høyden i pyramiden: $h = 5$.
Videre, grunnflata er gitt ved (Arealsetningen):

$$G = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \sin\theta = \frac{10}{2}\sqrt{2}sin\,45^\circ = 5.$$

Slik at volumet av pyramiden er:

$$V = 1/3G\cdot h = 1/3\cdot 5\cdot 5 = \underline{\underline{\frac{25}{3}}}.$$

c) $\overrightarrow{AT}\times\overrightarrow{AB} = [1,2,5]\times[3,1,0] = [0-5, -(0-15), 1-6] = \underline{\underline{[-5,15,-5] = 5[-1,3,-1]}}$

Dermed er arealet av sidekanten (som er en trekant):

Areal: $\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AT}\times\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{1+9+1} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{11}}{2} \approx 8{,}292.}}$

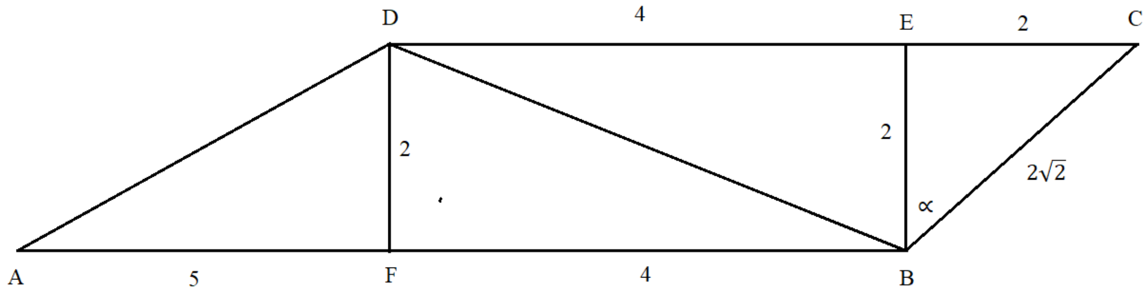
d) Dette planet går igjennom origo (=punktet A). Som normalvektor kan vi bruke:

$$\vec{n} = [-1,3,-1]$$

Dermed får vi ligningen for planet:

$$\underline{\underline{\alpha:\ -x+3y-z=0.}}$$

Oppgave 7




a) $\cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = 45°$

$\angle B = 90° + 45° \underline{\underline{= 135°}}$

b) $EB^2 + EC^2 = BC^2$

$EC = \sqrt{BC^2 - EC^2}\,m = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2^2}\,m = 2\,m$

$DE = 6\,m - 2\,m = 4\,m$

$BD^2 = BE^2 + EC^2$

$BD = \sqrt{BE^2 + EC^2}\,m = \sqrt{2^2 + 4^2}\,m = \sqrt{20}\,m \underline{\underline{= 2\sqrt{5}\,m}}$

c) $A = \frac{AB+CD}{2} \cdot BE$

$\frac{2 \cdot A}{BE} = AB + CD$

$AB = \frac{2 \cdot A}{BE} - CD = \frac{2 \cdot 15\,m^2}{2\,m} - 6\,m = 9\,m \quad \rightarrow \quad AF = 9\,m - 4\,m = 5\,m$

$\tan A = \frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\angle A = 21{,}8°}}$

## Oppgave 8

a) Sykdom A koster samfunnet på 1000 stykker:

$$K_{Uten\ vaksine} = 1.000.000 \cdot 2{,}3\ \% \cdot 1000 = 23.000.000$$

Med vaksine vil kostnadene bli:

$$K_{Med\ vaksine} = 2300 \cdot 1000 + 1.000.000 \cdot 2{,}3\ \% \cdot 1000 \cdot 10\ \% = 4.600.000$$

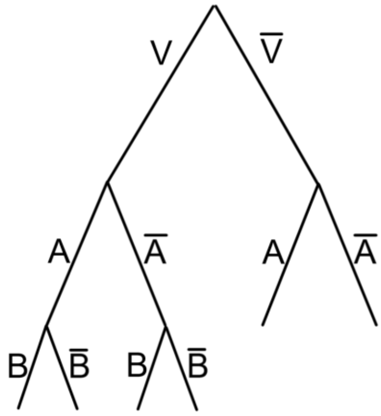
Besparelsene for dette samfunnet blir da:

$$K_{Uten\ vaksine} - K_{Med\ vaksine} = 18.400.000$$

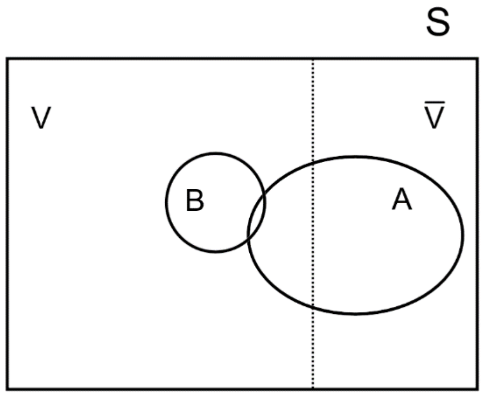
Svar: <u>Ja, det lønner seg stort for dette samfunnet å vaksinere befolkningen.</u>

b) $A$ = Utvikler sykdom A. $V$ = Har tatt vaksine mot sykdom A. $B$ = Utvikler sykdom B.

Valgtre:




Venndiagram:




c) $A$ = Utvikler sykdom A. $V$ = Har tatt vaksine mot sykdom A,

$$P(A) = P(V) \cdot P(A|V) + P(\bar{V}) \cdot P(A|\bar{V}) = 75\% \cdot 10\% \cdot 2{,}3\% + 25\% \cdot 2{,}3\%$$
$$= 0{,}007475\ (0{,}7475\%)$$

d) $P(V|A) = \frac{P(V) \cdot P(A|V)}{P(A)} = \frac{75\% \cdot 10\% \cdot 2{,}3\%}{0{,}7475\%} \approx 0{,}231\ (23{,}1\%)$