Løsningsforslag konteeksamen høst 2021

Oppgave 1

a) Finn tangenten til $f(x) = x^2 - 4x + 2$ i punktet $(4, f(4))$
En tangent er ei rett linje. Benytter ettpunktformelen: $y - y_0 = a(x - x_0)$
$x_0 = 4$
$y_0 = f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 2 = 2$
$f'(x) = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4$
$a = f'(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$

$\Rightarrow y - 2 = 4(x - 4)$
$y = 4x - 4 \cdot 4 + 2$
$y = 4x - 14$

b) Er $(x - 5)$ en faktor i $f(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20$?
Restleddet, $r = f(x_0) = f(5) = 5^3 - 2 \cdot 5^2 - 19 \cdot 5 + 20 = 0$ i en polynomdivisjon.
Dette betyr at $(x - x_0) = (x - 5)$ er en faktor i $f(x)$.

c) Som vi ser fra oppgave b) så går polynomdivisjonen opp. Vi har et forbudt område for $x = 5$, men ingen vertikal asymptote. Graden av x er to større i telleren enn i nevneren, så vi har ingen andre asymptoter heller.

d) Finn arealet begrenset av $f(x) = (x + 1)e^{x^2}$, $g(x) = e^{x^2}$ og linjene $x = 0 \wedge x = 1$.

Vi legger merke til at $f(x) = g(x)$ når $x = 0$. Og ellers vil $f(x) \geq g(x)$ på hele intervallet $x \in [0,1]$ da $(x + 1) > 1$ for positive verdier av x. Faktoren e^{x^2} er lik for begge funksjonene.

$$\Rightarrow A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^1 \left((x + 1)e^{x^2} - e^{x^2}\right) dx = \int_0^1 \left(xe^{x^2}\right) dx$$

Vi må foreta et variabelskifte her. $u = x^2$ gir $du = 2x\, dx$ eller $\frac{1}{2} du = x\, dx$.

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} (e^u)\, du = \frac{1}{2} [e^u]_{u_1}^{u_2} = \frac{1}{2} \left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^{1^2} - e^{0^2}\right) = \frac{1}{2}(e - 1)$$

Oppgave 2

a) $2h + 2x = 24$

$h + x = 12$

$h = 12 - x$

$V(x) = \text{grunnflate} \cdot \text{høyde} = \pi x^2 \cdot h = \pi x^2 \cdot (12 - x)$

b) $V(x) = \pi x^2 \cdot (12 - x) = 12\pi x^2 - \pi x^3$

$V'(x) = 24\pi x - 3\pi x^2$

$V''(x) = 24\pi - 6\pi x$

$V'(x) = 24\pi x - 3\pi x^2 = 0$

$3\pi x(8 - x) = 0$

$3\pi x = 0 \quad \vee \quad 8 - x = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 8$

$V''(8) = 24\pi - 6\pi \cdot 8 = -24\pi < 0 \quad \rightarrow \quad \mathit{Makspunkt}$

$V(x) = 12\pi \cdot 8^2 - \pi \cdot 8^3 = 256\pi \approx 804$

Det største volumet sylinderen kan ha er $256\pi\ m^3$

Oppgave 3

a) $\overrightarrow{AB} = [0-1, 0-1, 2-(-1)] \underline{\underline{= [-1,-1,3]}}$

$2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = 2[-2,2,4] - [1,-3-1] = [-4,4,8] - [1,-3-1] \underline{\underline{= [-5,7,9]}}$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [-1,-1,3] \cdot [-2,2,4] = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 12$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12}{\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{6}} \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{\angle A = 42{,}4°}}$$

c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_{\vec{x}} & e_{\vec{y}} & e_{\vec{z}} \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$= \big((-1)(-1) - 3(-3)\big)e_{\vec{x}} - \big((-1)(-1) - 3 \cdot 1\big)e_{\vec{y}} + \big((-1)(-3) - (-1) \cdot 1\big)e_{\vec{z}}$

$= 10e_{\vec{x}} + 2e_{\vec{y}} + 4e_{\vec{z}} = [10,2,4]$

$$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|[10,2,4]| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{120} \underline{\underline{= 2\sqrt{30}}}$$

d) Normalvektor: $\vec{n} = [10,2,4] = 2[5,1,2]$. Punkt: $B(0,0,2)$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$5(x - 0) + 1(y - 0) + 2(z - 2) = 0$

$\underline{\underline{5x + y + 2z - 4 = 0}}$

e) Vektorer i plan β: $\overrightarrow{AB} = [-1,-1,3]$ og $\overrightarrow{AC} = [-2,2,4]$. Punkt: $E(2,3,4)$

$$\beta = \begin{cases} x = 2 + (-1)t + (-2)s \\ y = 3 + (-1)t + 2s \\ z = 4 + 3t + 4s \end{cases} = \begin{cases} x = 2 - t - 2s \\ y = 3 - t + 2s \\ z = 4 + 3t + 4s \end{cases}$$

f) $D(0, y, 0)$ $\quad\quad \overrightarrow{AD} = [0 - 1, y - 1, 0 - (-1)] = [-1, y - 1, 1]$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}|[10,2,4] \cdot [-1, y - 1, 1]|$$

$$= \frac{1}{6}|10 \cdot (-1) + 2(y - 1) + 4 \cdot 1|$$

$$= \frac{1}{6}|-10 + 2y - 2 + 4| = \frac{1}{6}|-8 + 2y|$$

$$\frac{1}{6}|-8 + 2y| = 20$$

$$|-8 + 2y| = 120$$

$$-8 + 2y = 120 \quad \vee \quad -8 + 2y = -120$$

$$y = 64 \quad \vee \quad y = -56$$

$\underline{\underline{\text{Punktet } D \text{ får koordinatene } D(0,64,0) \text{ eller } D(0,-56,0)}}$

Oppgave 4

a) Avlest fra grafen til $g(x)$:

$g(x)$ vokser for $x \in \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 3, \rightarrow\rangle$ og $g(x)$ minker for $x \in \langle 0, 3\rangle$.
$g(x)$ vender den hule siden ned for $x \in \langle \leftarrow, \frac{3}{2}\rangle$ og den hule siden opp for $x \in \langle \frac{3}{2}, \rightarrow\rangle$.

Fortegnsskjema:

	0	1,5	3	x
$f'(x)$	+++++++++++++++++++0	-------------------------------------	0++++++++++++++++++++	
$f''(x)$	---	0++++++++++++++++++++++++++++++++		

b) En funksjon med to ekstremalpunkter (derav ingen terrassepunkter) er en tredjegradsfunksjon.

$\Rightarrow g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$
Vi vet $g(0) = 6$, så $d = 6$.
$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ og $g'(0) = 0$ (toppunkt i $(0{,}6)$), så $c = 0$.
Vi har nå to ukjente igjen og trenger dermed to likninger.

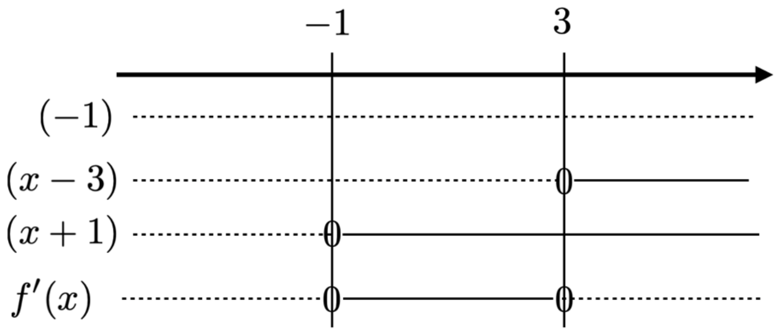
$I)\ g'(3) = 0$
$II)\ g(3) = -21$
$I)\ 3 \cdot a \cdot 3^2 + 2 \cdot b \cdot 3 = 0$ (Husk c = 0)
$I)\ b = -\dfrac{9}{2}a$
$II)\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + 6 = -21$ (Husk c = 0 og d = 6)
$II)\ a \cdot 27 + \left(-\frac{9}{2}a\right) \cdot 9 + 6 = -21$
$II)\ a \cdot 27 + \left(-\frac{9}{2}a\right) \cdot 9 = -27$
$II)\ \left(-\dfrac{27}{2}a\right) = -27$
$II)\ a = 2$
$I)\ b = -\dfrac{9}{2} \cdot 2 = -9$

$\Rightarrow g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6.$

c) La oss først regne ut den deriverte:

$$f'(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-3)(x+1)$$

Det gir fortegnslinjer:



Dermed har vi:
f er synkende på $\langle \leftarrow, -1]$ og på $[3, \rightarrow\rangle$.
f er voksende på $[-1,3]$.

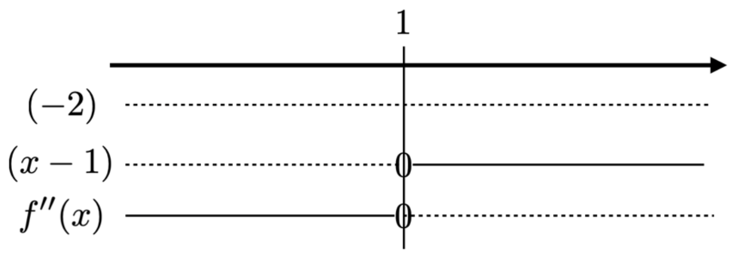
Bunnpunkt: $\left(-1, f(-1)\right) = \underline{\underline{\left(-1, -\frac{5}{3}\right)}}$.

Toppunkt: $\left(3, f(3)\right) = \underline{\underline{(3,9)}}$.

d) Den dobbeltderiverte:

$$f''(x) = -2x + 2 = -2(x-1).$$

Det gir fortegnslinjer:



Dermed:
f krummer opp på $\langle \leftarrow, 1]$.
f krummer opp på $[1, \rightarrow\rangle$.

Vendepunkt: $\left(1, f(1)\right) = \underline{\underline{\left(1, \frac{11}{3}\right)}}$

e) Avstanden fra punktet P til linja er lengden av en vektor $\overrightarrow{PA}$ som er vinkelrett på linja, og hvor A ligger på linja. Linja har retningsvektor $\vec{r} = [-3,4,2]$. Disse to kriteriene gir oss:

$$\overrightarrow{PA} = [2 - 3t - 1, -1 + 4t - 4, 1 + 2t - 4] = [1 - 3t, -5 + 4t, -3 + 2t].$$

og

$\overrightarrow{PA} \cdot \vec{r} = 0.$

Dermed:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \vec{r} = -3(1 - 3t) + 4(-5 + 4t) + 2(-3 + 2t) = -29 + 29t = 0$$
$$\Rightarrow t = 1.$$

Slik at: $\overrightarrow{PA} = [1 - 3, -5 + 4, -3 + 2] = [-2, -1, -1] = (-1)[2,1,1].$

Hvis P skal ligge i planet, og avstanden fra P til linja være lik avstanden fra linja til planet, må $\overrightarrow{PA}$ være normalt på planet. Dermed har vi en normalvektor, feks $[2,1,1]$, og et punkt, slik at planet får ligningen:

$$2(x - 1) + (y - 4) + (z - 4) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{2x + y + z = 10}}$$

Oppgave 5

a) Lengdene $SA = SB = S_1S_2 = 1$, radien i sirklene.
Midtpunktet, M, mellom A og B er også midtpunktet mellom $S_1 \; og \; S_2$.
Lengden $SM = \frac{1}{2}S_1S_2 = \frac{1}{2}$
Trekant SAM blir en rettvinklet trekant og vi kan benytte Pythagoras:

$$AM^2 = AS^2 - SM^2$$
$$AM^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$AM = \sqrt{AM^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = BM$$
$$AB = AM + BM = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

b) Finn de ukjente vinklene i tranten som dannes mellom sentrum i en av sirklene og punktene A og B.

Løsningsforslag:
Trekant ABS vil være likebeint.
Vi benytter oss av den rettvinklede trekanten SAM fra oppgave a).

$$\sin \angle A = \frac{SM}{AS} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\angle A = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30^{\circ} = \angle B$$

$$\textit{Den alternative løsningen for vinkel A og B er urealistisk i denne oppgaven.}$$

$$\angle S = 180^{\circ} - (\angle A + \angle B) = 120^{\circ}$$

Oppgave 6

a)

$$a_8 = a_1 + (8-1)d \qquad a_{27} = a_1 + (27-1)d$$
$$\frac{8}{3} = a_1 + 7d \qquad 9 = a_1 + 26d$$

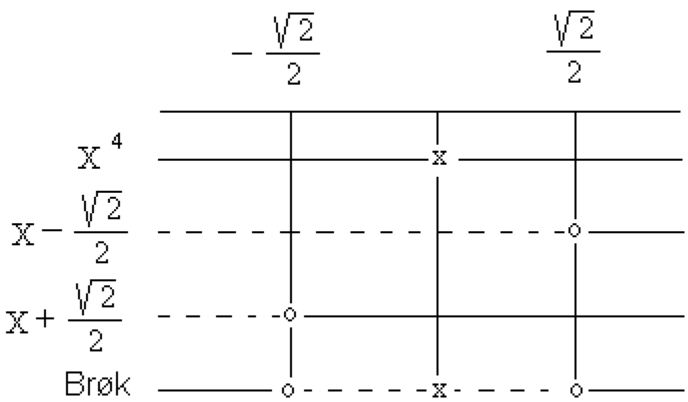
$$9 = a_1 + 26d$$
$$\frac{8}{3} = a_1 + 7d$$
$$\frac{19}{3} = 19d$$
$$\underline{d = \frac{1}{3}} \qquad 9 = a_1 + 26d \quad \rightarrow \quad a_1 = 9 - 26 \cdot \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$S_{40} = \left(a_1 + \frac{40-1}{2} \cdot d\right) \cdot 40 = \left(\frac{1}{3} + \frac{39}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 40 = \underline{\frac{820}{3}}$$

b) $k = \frac{a_2}{a_1} = \underline{\frac{x^2-1}{x^2}}$

c) $k^2 \langle 1$

$$\frac{(x^2-1)^2}{x^4} \langle 1$$
$$\frac{(x^2-1)^2}{x^4} - 1 \langle 0$$
$$\frac{(x^2-1)^2}{x^4} - \frac{x^4}{x^4} \langle 0$$
$$\frac{x^4-2x^2+1-x^4}{x^4} \langle 0$$
$$\frac{-2x^2+1}{x^4} \langle 0$$
$$\frac{2x^2-1}{x^4} \rangle 0$$
$$\frac{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})(x+\frac{\sqrt{2}}{2})}{x^4} \rangle 0$$



$\underline{L = \left\langle \leftarrow, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \rightarrow \right\rangle}$

d) $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{x^2}{1-\frac{x^2-1}{x^2}} = 4$

$\frac{x^4}{x^2-x^2+1} = 4$

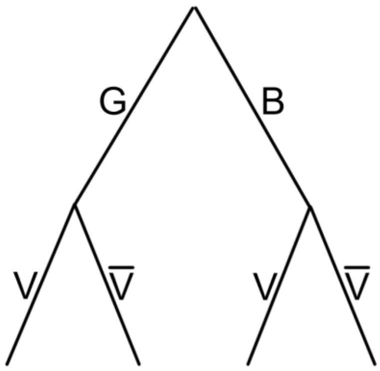
$x^4 = 4$

$x = \pm\sqrt[4]{4} = \pm 2^{\frac{2}{4}} \underline{= \pm\sqrt{2}}$

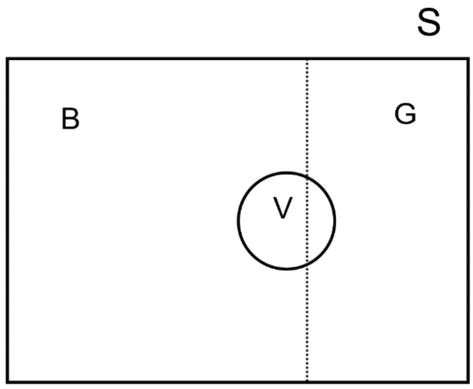
Oppgave 7

a) G = Gult lodd. B = Blått lodd. V = Vinnerlodd.

Valgtre:



Venndiagram:



b) $P(G) = \frac{30}{100} = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}$. $P(V) = \frac{3+10}{100} = \underline{\underline{\frac{13}{100}}}$.

$P(G \cap V) = \underline{\underline{\frac{3}{100}}}$. $P(V|G) = \frac{3}{30} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$.