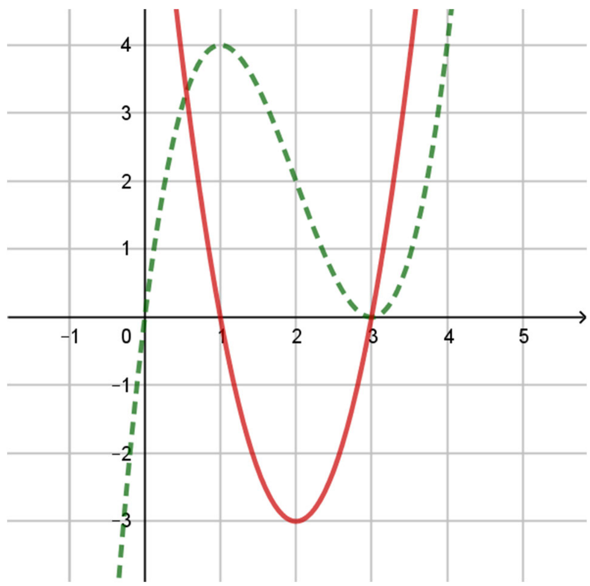
Løsningsforslag

Eksamen matematikk 20. mai 2022

Forkurs for ingeniørutdanningen

Oppgave 1

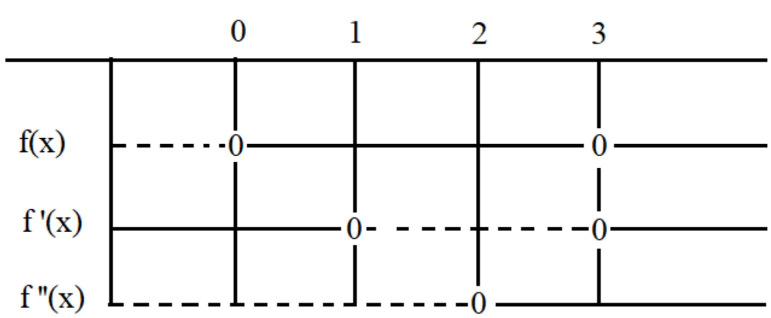


Figuren viser to funksjoner $f(x)$ og $f'(x)$.

a) Bruk figuren til å tegne fortegnslinjene for $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$.

b) Finn et funksjonsuttrykk for tredjegradsfunksjonen $f(x)$.

a)



b)

$f(x)$ *er den stiplete funksjonen. Den har nullpunkt i* $x = 0$

og et dobbelt nullpunkt i $x = 3$.

$f(x) = a \cdot x(x-3)^2 = a \cdot x(x^2 - 6x + 9) = a \cdot (x^3 - 6x^2 + 9x)$

Siden $f(1) = a \cdot (1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1) = 4a$ *vil*

$4a = 4 \Rightarrow a = 1$, *så*

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ *er funksjonsuttrykket.*

Oppgave 2

Gitt koordinatene til de tre hjørnene i en trekant ABC: $A(1,2,1)$, $B(2,1,0)$ og $C(4,3,6)$.

a) Regn ut vektorene: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $3\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

b) Regn ut vinkel C i trekanten.

c) Regn ut arealet av trekanten.

d) Regn ut en likning for planet α gjennom punktene A, B og C.

e) Gitt et punkt D som ligger på z-aksen. Finn koordinatene til punktet D slik at $\overrightarrow{AD}$ står vinkelrett på $\overrightarrow{AB}$.

a)

$\overrightarrow{AB} = [2-1, 1-2, 0-1] \underline{\underline{= [1,-1,-1]}}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = [4-1, 3-2, 6-1] \underline{\underline{= [3,1,5]}}$

$$3\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = 3[1,-1,-1] - \frac{1}{2}[-3,-1,-5] = [3,-3,-3] + \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{6}{2} + \frac{3}{2}, -\frac{6}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{6}{2} + \frac{5}{2}\right] \underline{\underline{= \left[\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right]}}$$

b)

$\overrightarrow{CA} = [-3, -1, -5]$ $\overrightarrow{CB} = [-2, -2, -6]$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{44}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = [-3, -1, -5] \cdot [-2, -2, -6] = -3(-2) + (-1)(-2) + (-5)(-6) = 38$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{38}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{44}} = 0.968 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{C = 14.5°}}$$

c)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [1, -1, -1] \times [3,1,5] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{e_x}(-1 \cdot 5 - (-1) \cdot 1) - \overrightarrow{e_y}(1 \cdot 5 - (-1) \cdot 3) + \overrightarrow{e_z}(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3)$$

$$= -4\overrightarrow{e_x} - 8\overrightarrow{e_y} + 4\overrightarrow{e_z} = [-4, -8, 4] = 4[-1, -2, 1]$$

$$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|4[-1, -2, 1]| = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} \underline{\underline{= 2\sqrt{6}}}$$

d)

$\vec{n} = [1,2,-1]$ $A(1,2,1)$,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$1(x - 1) + 2(y - 2) + (-1)(z - 1) = 0$$

$x - 1 + 2y - 4 - z + 1 = 0$

$\underline{\underline{x + 2y - z - 4 = 0}}$

e)

$D(0,0,z) \qquad \overrightarrow{AD} = [0 - 1, 0 - 2, z - 1] = [-1, -2, z - 1]$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$[-1, -2, z - 1] \cdot [1, -1, -1] = 0$

$-1 \cdot 1 + (-2)(-1) + (z - 1)(-1) = 0$

$-1 + 2 - z + 1 = 0$

$z = 2$

$\underline{\underline{Punktet\ D\ har\ koordinatene:\ D(0,0,2)}}$

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x) = (1 - x) \cdot e^x$. Alle svar på denne oppgaven skal oppgis med eksakte verdier.

a) Regn ut eventuelle skjæringspunkter med koordinataksene.

b) Regn ut eventuelle topp- eller bunnpunkter og beskriv monotoniegenskapene til f.

c) Regn ut eventuelle vendepunkter og finn krumningsegenskapene til f.

d) Regn ut tangenten til funksjonen i punktet $\big(1, f(1)\big)$.

a)

$f(x) = (1 - x) \cdot e^x = 0 \qquad x \in R$

$1 - x = 0 \quad \vee \quad e^x = 0$

$x = 1 \qquad \emptyset$

$\underline{\underline{Skjæringspunkt\ med\ x - aksen:\ (1,0)}}$

$f(0) = (1 - 0) \cdot e^0 = 1$

$\underline{\underline{Skjæringspunkt\ med\ y - aksen:\ (0,1)}}$

b)

$f(x) = (1 - x) \cdot e^x$

$u = 1 - x \qquad u' = -1$

$v = e^x \qquad v' = e^x$

$f'(x) = -1 \cdot e^x + (1 - x)e^x = e^x(-1 + 1 - x) = -e^x x$

$u = x \qquad u' = 1$

$v = -e^x \qquad v' = -e^x$

$f''(x) = 1 \cdot (-e^x) + x(-e^x) = -e^x(1 + x)$

$f'(x) = -e^x x = 0$

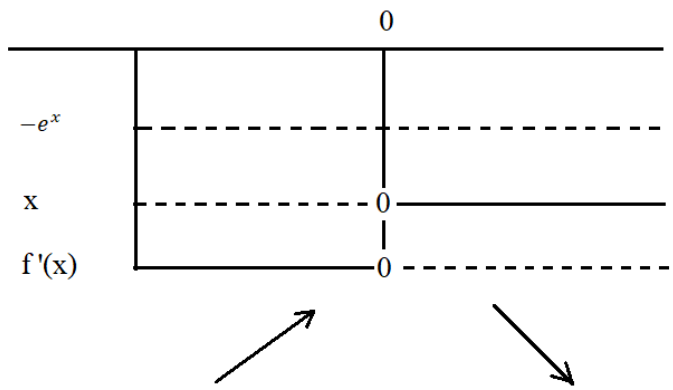
$\mathrm{x} = 0 \quad \vee \quad -\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 0$

$\emptyset$

$f(0) = (1 - 0) \cdot e^0 = 1$

$f''(0) = -e^0(1 + 0) = -1 < 0 \quad Toppunkt.$

$\underline{\underline{Toppunktet\ (0,1)}}$



$$\underline{\underline{Funksjonen\ synker\ når\ x \in [0, \rightarrow\rangle}}$$

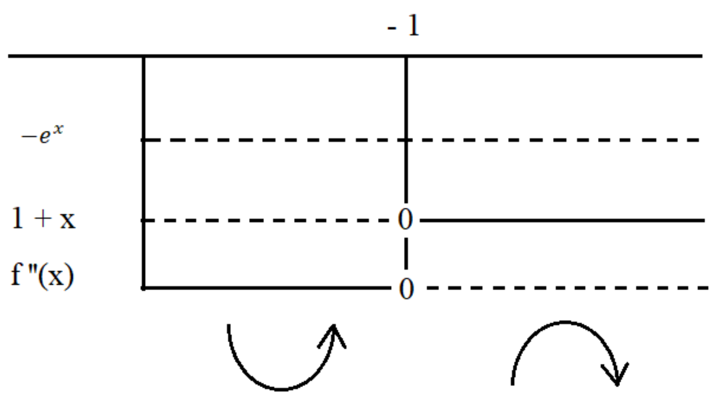
$$\underline{\underline{Funksjonen\ stiger\ når\ x \in \langle\leftarrow, 0]}}$$

$$f''(x) = -e^x(1 + x) = 0$$

$$1 + x = 0 \quad \vee \quad -e^x = 0$$

$$x = -1 \qquad\qquad\qquad \emptyset$$

$$f(-1) = \big(1 - (-1)\big) \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$$



$$\underline{\underline{Vendepunkt: (-1, \frac{2}{e})}}$$

$$\underline{\underline{Funksjonen\ har\ den\ hule\ siden\ opp\ når\ x \in \langle \leftarrow, -1]}}$$

$$\underline{\underline{Funksjonen\ har\ den\ hule\ siden\ ned\ når\ x \in [-1, \rightarrow\rangle}}$$

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = f(1) = (1 - 1) \cdot e^1 = 0$$

$$f'(x_1) = f'(1) = -e^1 \cdot 1 = -e$$

$$y - 0 = -e(x - 1)$$

$$\underline{\underline{y = -ex + e}}$$

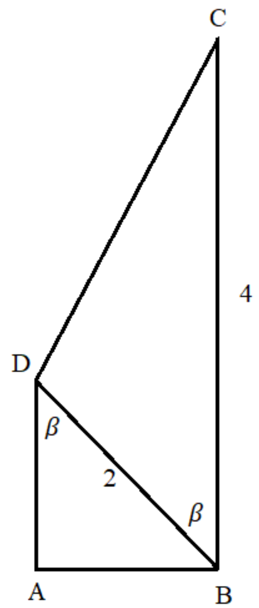
Oppgave 4

Gitt et trapes ABCD. Siden BC er parallell med siden AD. $BC = 4$, $BD = 2$,

$\angle ABC = 90° \ og \ \angle DBC = \beta.$ $\beta \in \langle 0°, 90° \rangle$

a) Vis at arealet til trapeset kan skrives som $A(\beta) = 4\sin(\beta) + \sin(2\beta)$.

b) Regn ut for hvilken verdi av β trapeset får størst mulig areal?



a)

$\sin \beta = \dfrac{AB}{2} \qquad \rightarrow \qquad AB = 2 \sin \beta$

$\cos \beta \ = \dfrac{AD}{2} \qquad \rightarrow \qquad AD = 2 \cos \beta$

$A(\beta) = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot AB = \dfrac{4 + 2 \cos \beta}{2} \cdot 2 \sin \beta = (4 + 2 \cos \beta) \sin \beta$

$(\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cdot \cos \beta)$

$= 4 \sin \beta + 2 \sin \beta \cdot \cos \beta = \underline{\underline{4 \sin \beta + \sin 2\beta}}$

b)

$A'(\beta) = \dfrac{\pi}{180}(4 \cos \beta + 2 \cdot \cos 2\beta)$

$A''(\beta) = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)^2 (-4 \sin \beta + 2 \cdot 2\,(-\sin 2\beta)) = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)^2 (-4 \sin \beta - 4 \sin 2\beta)$

Kjerneregelen gir den ekstra faktoren $\frac{\pi}{180}$ når vinkelen er målt i grader.

$A'(\beta) = 4 \cos \beta + 2 \cdot \cos 2\beta = 0$

$2 \cos \beta + \cos 2\beta = 0$

$$2\cos\beta + (2cos^2\beta - 1) = 0$$

$$2cos^2\beta + 2\cos\beta - 1 = 0$$

$$\cos\beta = 0.366 \qquad \vee \qquad \cos\beta = -1.37 \ \ (ingen\ løsning)$$

$$\beta = 68.5° + k \cdot 360°$$

$$\beta = 360° - 68.5° + k \cdot 360°$$

$$\beta = 68.5° + k \cdot 360°$$

$$\beta = 292° + k \cdot 360° \ \ Ingen\ løsning\ fordi\ \beta \in \langle 0°, 90° \rangle$$

$$\beta = 68.5° + 0 \cdot 360° = 68.5° \quad (eneste\ løsning\ fordi\ \beta \in \langle 0°, 90° \rangle)$$

$$A''(68.5°) = \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 (-4\sin 68.5° - 4\sin(2 \cdot 68.5°)) = -0.002 < 0 \quad toppunkt.$$

$$\underline{\underline{\beta = 68.5° \ \ gir\ firkanten\ ABCD\ størst\ areal.}}$$

Oppgave 5

Regn ut summen av alle hele tall mellom 100 og 1000 som er delelig med 6.

$a_1 = 102$

$a_n = 996$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n - a_1 = (n-1)d$

$a_n - a_1 = nd - d$

$a_n - a_1 + d = nd$

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d} = \frac{996 - 102 + 6}{6} = 150$$

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{150(102 + 996)}{2} \underline{\underline{= 82350}}$$

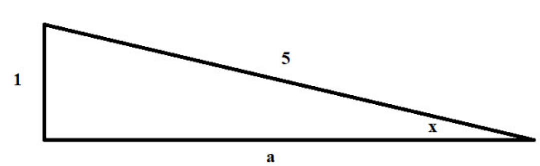
Oppgave 6

Vinkelen x er slik at $\sin x = \frac{1}{5}$. I tillegg er $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Regn ut eksaktverdier til $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$ og $\tan 2x$.
b) Tegn enhetssirkelen og bruk denne til å finne eksaktverdi til:

$\sin(-x)$, $\cos\ (\pi - x)$ og $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

a)



$a^2 + 1^2 = 5^2$

$a^2 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$

$a = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

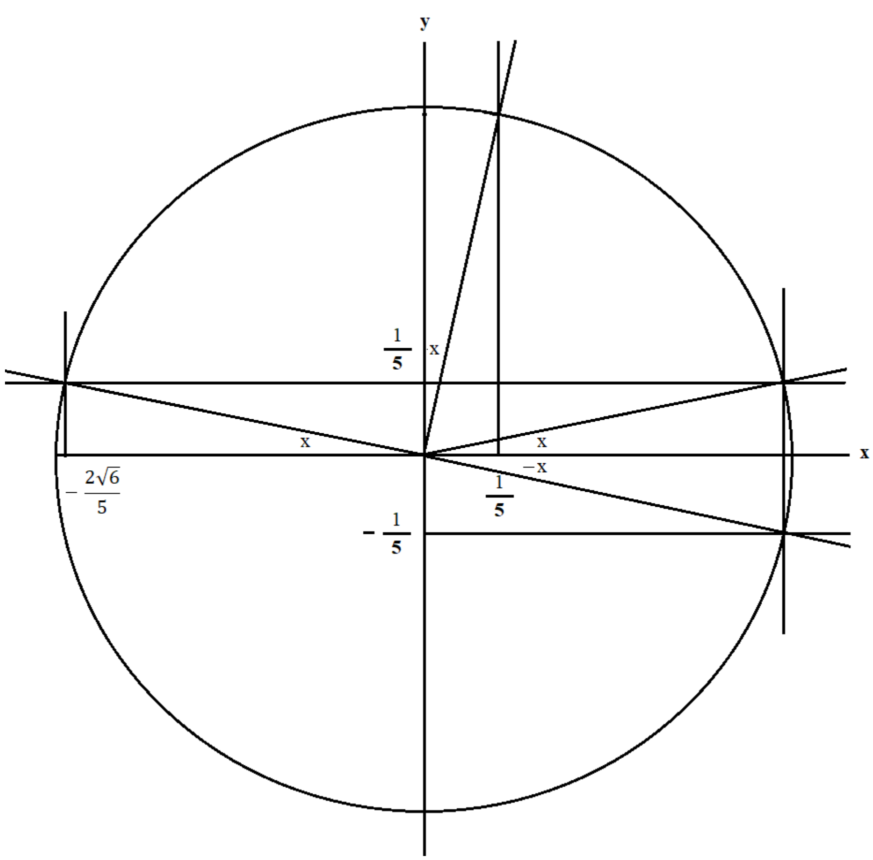
$$\cos x = \frac{a}{5} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{6}}{5}}}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{6}}{25}}}$$

$$\cos 2x = 1 - 2sin^2x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{2}{25} = \frac{25}{25} - \frac{2}{25} = \underline{\underline{\frac{23}{25}}}$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\frac{4\sqrt{6}}{25}}{\frac{23}{25}} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{6}}{23}}}$$

b)



$$\sin(-x) = \underline{\underline{-\frac{1}{5}}}$$

$$\cos(\pi - x) = \underline{\underline{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

Oppgave 7

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{x+1}{x^2+5x+6} \quad x \in [0, \rightarrow\rangle$.

a) Vis ved hjelp av derivasjon at: $\int f(x)\ dx = \ln (x+3)^2 - \ln (x+2) + C$ $(C\ er\ en\ konstant)$

b) Regn ut arealet begrenset av x-aksen, $f(x)$ og linja $x = 2$. Regn eksakt.

c) Regn ut asymptotene til $f(x)$.

a)

$$g(x) = \ln (x+3)^2 - \ln (x+2) + C = 2\ln (x+3) - \ln (x+2) + C$$

$$g'(x) = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)}{(x+3)(x+2)} - \frac{1(x+3)}{(x+3)(x+2)} = \frac{2x+4-x-3}{(x+3)(x+2)}$$

$$\underline{\underline{= \frac{x+1}{x^2+5x+6}}}$$

b)

$$\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx = [2\ln(x+3) - \ln(x+2)]_0^2 = 2\ln(2+3) - \ln(2+2)$$

$$-(2\ln(0+3)-\ln(0+2)) = 2\ln 5 - \ln 4 - 2\ln 3 + \ln 2 = 2\ln 5 - \ln 2^2 - 2\ln 3 + \ln 2$$

$$2\ln 5 - 2\ln 2 - 2\ln 3 + \ln 2 \underline{\underline{= 2\ln 5 - \ln 2 - 2\ln 3}}$$

c)

Horisontal asymptote:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} = 0$$

$$\underline{\underline{\textit{Horisontal asymptote } Y = 0 \text{ det } \textit{vil si } x - \textit{aksen}}}$$

Vertikal asymptote:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2) = 0$$

$$x = -3 \quad \textit{eller} \quad x = -2$$

$$\underline{\underline{\textit{Siden disse svarene ikke er med i } x \in [0, \rightarrow\rangle, \textit{har } f(x) \textit{ ingen vertikale asymptoter}}}$$

Oppgave 8

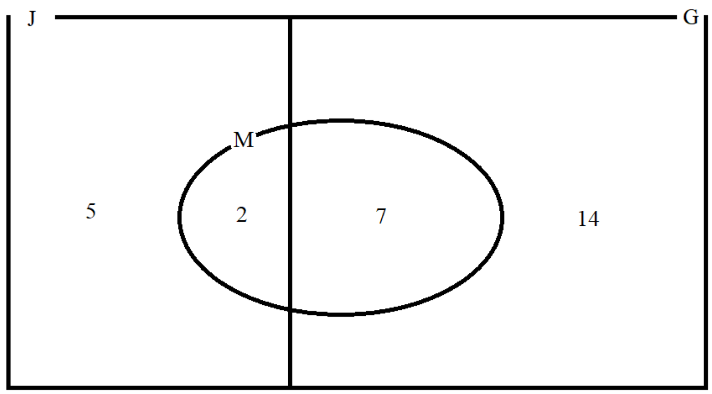
I en klasse er det 28 elever. 7 av elevene er jenter. To av jentene har med seg matpakke på skolen. Av guttene er det $\frac{1}{3}$ som har med seg matpakke på skolen.

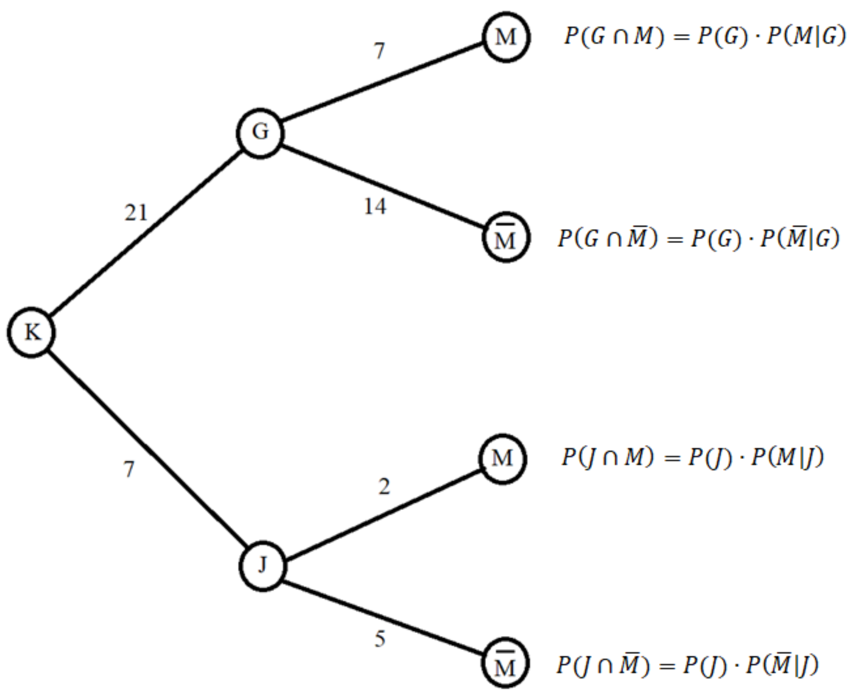
a) Tegn et valgtre og et venndiagram som kartlegger denne situasjonen.

b) Regn ut sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er jente som har med seg matpakke på skolen.

c) Regn ut sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev har med seg matpakke på skolen.

d) Vi plukker ut en elev som har med seg matpakke på skolen. Regn ut sannsynligheten for at denne eleven er en gutt.





G: $Gutt$

J: $Jente$

M: $Har\ med\ matpakke$

$\overline{M}$: $Har\ ikke\ med\ matpakke$

b)

$$P(J \cap M) = P(J) \cdot P(M|J) = \frac{7}{28} \cdot \frac{2}{7} = \underline{\underline{\frac{1}{14}}}$$

c)

$$P(M) = P(J \cap M) + P(G \cap M) = P(J) \cdot P(M|J) + P(G) \cdot P(M|G) = \frac{7}{28} \cdot \frac{2}{7} + \frac{21}{28} \cdot \frac{7}{21} = \underline{\underline{\frac{9}{28}}}$$

d)

$$P(G|M) = \frac{P(G) \cdot P(M|G)}{P(M)} = \frac{\frac{21}{28} \cdot \frac{7}{21}}{\frac{9}{28}} = \underline{\underline{\frac{7}{9}}}$$

Oppgave 9

Gitt funksjonen $f(x) = \sqrt{x}(1 + x^2)$

Vi roterer flatestykket mellom x-aksen, linja $x = 1$ og $f(x)$ og $360°$ om x-aksen.

Regn ut volumet av omdreiningslegemet vi da får.

$$V = \pi \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}(1 + x^2)\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \sqrt{x}^2 (1 + x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x(1 + 2x^2 + x^4) dx = \pi \int_0^1 (x + 2x^3 + x^5) dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6\right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{2}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{6} \cdot 1^6 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{2}{4} \cdot 0^4 + \frac{1}{6} \cdot 0^6\right)\right) = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{7\pi}{6}}}$$

Oppgave 10

Gitt differensiallikningen

$$y' = \frac{2x \ln x}{y}, \quad y > 0$$

a) Vis at differensiallikningen har generell løsning $y = \sqrt{2x^2 \ln x - x^2 + C}$.
b) Finn den løsningen av differensiallikningen som er slik at $y = 2$ når $x = 1$.

$$y' = \frac{2x \ln x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xln\ x}{y}$$

$$y\ dy = 2xln\ x\ dx$$

$$\int y\ dy = \int 2xln\ x\ dx$$

$$\int 2xln\ x\ dx = x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x - \int xdx = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$v = \ln x \qquad v' = \frac{1}{x}$$

$$u = x^2 \qquad u' = 2x$$

$$\int y\ dy = \int 2xln\ x\ dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C'$$

$$y^2 = 2x^2 \ln x - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 2C'$$

$$\underline{\underline{y = \sqrt{2x^2 \ln x - x^2 + C}}} \qquad C = 2C'$$

b)

$$y = 2\ \ når\ \ x = 1$$

$$2 = \sqrt{2 \cdot 1^2 \cdot \ln 1 - 1^2 + C}$$

$$2^2 = \left(\sqrt{0 - 1 + C}\right)^2$$

$$4 = -1 + C$$

$$C = 4 + 1 = 5$$

$$\underline{\underline{y = \sqrt{2x^2 \ln x - x^2 + 5}}}$$