Prøve i	FO929A - Matematikk
Dato:	1. juni 2012
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	5 (20 deloppgaver)
Antall sider:	2
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

Løsningsforslag

Oppgave 1 Deriver følgende funksjoner.

a)

$$f(x) = 2x + 3x^7 + 4\sin(2)$$

Den deriverte er $\underline{f'(x) = 2 + 21x^6}$.

b)

$$g(x) = \frac{1 + x^4}{x^2} - 3\sqrt{x+1} + e$$

Funksjonen er lik $g(x) = 1/x^2 + x^2 + -3\sqrt{x+1} + e$. Den deriverte er lik $\underline{g'(x) = -2/x^3 + 2x - 3/(2\sqrt{x+1})}$.

c)

$$h(x) = e^{2x+1}\cos(x)$$

Ved produktregelen og kjerneregelen er den deriverte lik

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x+1)'e^{2x+1}\cos(x) + e^{2x+1}(-\sin(x)) \\ &= \underline{e^{2x+1}(2\cos(x) - \sin(x))}. \end{aligned}$$

En sirkel S er gitt ved likningen

$$x^2 - 6x + y^2 = 4y + 3.$$

d) Bestem radius og senter til sirkelen S.

Ved fullføring av kvadrat er likningen lik

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 3 + (-3)^2 + (-2)^2 = 16 = 4^2.$$

Derfor beskriver dette en sirkel med <u>senter i punktet $(3, 2)$ og radius 4</u>.

e) Finn likningen til de tangentlinjene til sirkelen S som har stigningstall 1.
Ved implisitt derivasjon er $2(x-3)+2(y-2)y' = 0$. Hvis den deriverte y' er lik 1 er derfor $(x-3) = -(y-2)$. Setter vi dette inn i den opprinnelig likningen får vi $2(x-3)^2 = 16$. Dette har to løsninger $(x-3) = \pm 2\sqrt{2}$. Siden $y = 2-(x-3)$ i disse punktene er koordinatene til punktene hvor $y' = 1$ lik $(3+2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$ og $(3-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$. Likningene til tangentlinjene er derfor gitt ved

$$\underline{y = x + (-1+4\sqrt{2}) \quad \text{og} \quad y = x + (-1-4\sqrt{2})}.$$

Alternativt kan man gi et mer geometrisk argument.

Oppgave 2 Finn de ubestemte og bestemte integralene.

a)
$$\int \sqrt[3]{x} - 3/x \, dx$$

Det ubestemte integralet er lik $\underline{3x^{4/3}/4 - 3\ln|x| + C}$.

b)
$$\int \frac{1+x}{x^2-4} \, dx$$

Vi benytter delbrøksoppspalting. Det finnes konstanter A og B slik at

$$\frac{1+x}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Vi finner en felles nevner og sammenligner tellerne: $1+x = A(x+2) + B(x-2)$. Dette har løsning $A = 3/4$ og $B = 1/4$. Derfor er integralet lik

$$\int \frac{3/4}{x-2} + \frac{1/4}{x+2} \, dx = \underline{\frac{3\ln|x-2| + \ln|x+2|}{4}}.$$

c)
$$\int_1^2 x \ln x \, dx$$

Det bestemte integralet er lik

$$(1/2)x^2 \ln x - (1/4)x^2 |_1^2 = (1/2)(2^2\ln(2) - 1\ln(1)) - (1/4)(2^2 - 1) = \underline{2\ln(2) - 3/4}.$$

d)
$$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}} \, dx.$$

Vi velger substitusjonen $u = 2 - 3x$. Da er $dx = -1/3\,du$ og $x = (2-u)/3$. Ved substitusjon er integralet lik

$$\int \frac{(2-u)/3}{\sqrt{u}}(-1/3)\,du = \frac{-1}{9}\int 2/\sqrt{u} - \sqrt{u}\,du = \frac{1}{9}(2u^{3/2}/3 - 4\sqrt{u}) + C$$

$$= \underline{\frac{-2(4+3x)\sqrt{2-3x}}{27} + C}.$$

Alternativt kan det brukes delvis integrasjon.

Oppgave 3

Gitt to funksjoner $f(x) = x^3 + x^2$ og $g(x) = 2x$.

a) Finn alle skjæringspunktene til f og g (hvor $f(x) = g(x)$).

Skjæringspunktene er punkt hvor funksjonene er like. Da må x tilfredstille likningen $2x = x^3 + x^2$. Dette er det samme som

$$x(x^2 + x - 2) = x(x+2)(x-1) = 0.$$

Skjæringspunktene er derfor $\underline{(-2,-4), (0,0) \text{ og } (1,2)}$.

b) Bestem arealet til regionen(e) avgrenset av grafen til f og g.

Regionen er området mellom grafen til f og g fra $x = -2$ til $x = 0$. Vi har at $f \geq g$ i intervallen $[-2, 0]$ og $g \geq f$ i intervallen $[0, 1]$. Derfor er arealet til regionen avgrenset av f og g summen

$$\int_{-2}^{0} f - g\,dx + \int_{0}^{1} g - f\,dx.$$

En antiderivert til $(f-g)(x) = x^3 + x^2 - 2x$ er $x^4/4 + x^3/3 - x^2$. Arealet er derfor $-((-2)^4/4 + (-2)^3/3 - (-2)^2) - (1/4 + 1/3 - 1) = \underline{37/12}$

c) Legemet R fremkommer ved å rotere grafen til $f(x) = x^2 - 1$, avgrenset til $0 \leq x \leq 2$, om x-aksen. Regn ut volumet til legemet R.

Volumet er

$$\int_0^2 \pi(x^2-1)^2\,dx = \pi\int_0^2 x^4 - 2x^2 + 1\,dx =$$

$$\pi(x^5/5 - 2x^3/3 + x)|_0^2 = \pi(32/5 - 16/3 + 2) = \underline{46/15}\pi.$$

Oppgave 4 Vi har to punkt i rommet $A = (1, 2, 4)$ og $B = (-2, 0, 3)$.

a) Bestem vektoren $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ og absoluttverdien til $\overrightarrow{AB}$.

Vektoren $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ er lik $(-3, -2, -1)$. Absoluttverdien er $|\overrightarrow{v}| = \underline{\sqrt{14}}$.

b) En annen vektor $\overrightarrow{u}$ er gitt ved $\overrightarrow{u} = [2, -1, -3]$. Regn ut skalarproduktet av $\overrightarrow{u}$ og $\overrightarrow{v}$. Finn vinkelen mellom $\overrightarrow{u}$ og $\overrightarrow{v}$?

Skalarproduktet er $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -6 + 2 + 3 = \underline{-1}$.

Absoluttverdien til $\overrightarrow{u}$ er lik $\sqrt{14}$. Vinkelen a mellom vektorene er mellom 0 og π radian og har egenskapen

$$\cos a = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} = -1/14.$$

Derfor er vinkelen lik $a = \underline{1.642...}$ (≈ 94.1 grader).

c) Regn ut kryssproduktet $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}$. Et punkt C er gitt ved $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. Regn ut arealet til trekanten ABC.

Kryssproduktet er lik $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \underline{[-5, 11, -7]}$. Arealet til trekanten ABC er lik $1/2|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = \underline{\sqrt{25 + 121 + 49}/2} = \underline{\sqrt{195}/2}$.

d) La $\overrightarrow{AD} = [-2, t, t^2 + t^3]$ hvor t er en reell variabel i intervallen $[-3, 3]$.

Bestem det minste og det største volumet pyramiden $ABCD$ kan ha for variabelen t i intervallen $[-3, 3]$.

Volumet er

$$V = 1/6|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{AD}| = (1/6(|10 + 11t - 7(t^2 + t^3)|.$$

Verdiene i endepunktene er

$$V(-3) = |10 - 33 - 7 \cdot (9 - 27)|/6 = (-23 + 7 \cdot 18)/6 = 17.17...$$

og

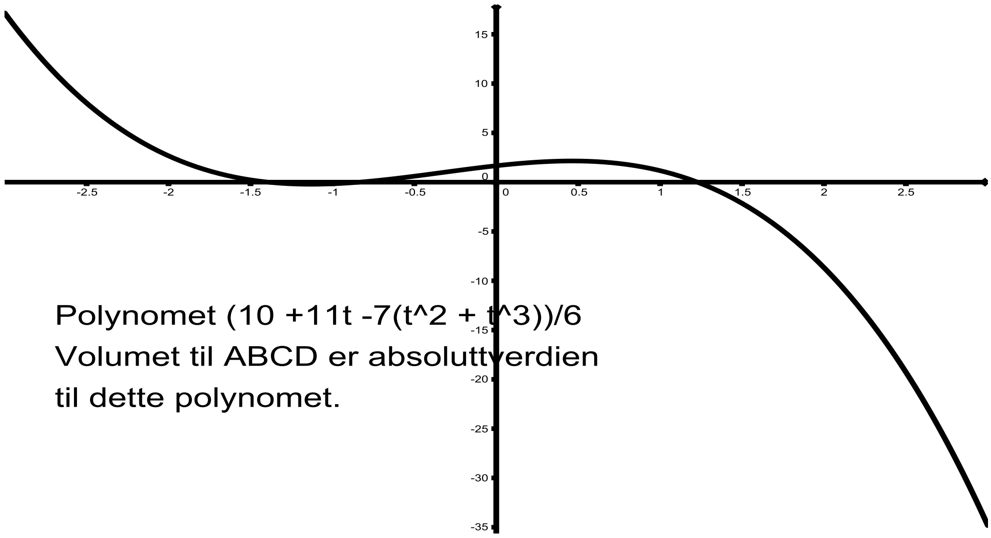
$$V(3) = |10 + 33 - 7 \cdot (9 + 27)|/6 = |437 \cdot 36|/6 = |209/6| = 34.83....$$

Siden $10 + 11t - 7(t^2 + t^3)$ er en kontinuerlig funksjon på intervallen $[-3, 3]$, og den tar både positive og negative verdier, så vil $V(t)$ være lik 0 for en t i $[-3, 3]$. <u>Det minste volumet er lik 0</u>. For å finne de største volumet undersøker vi om tallerverdien til $-t^3 + t^2 + t + 2$ kan være større enn 209/6. Vi kan tegne inn grafen til $V(t)$ på en kalkulator og ser da at største verdi i intervallen blir oppnåd for $t = 3$. <u>Det største volumet er lik 209/6</u>. (Alternativt kan vi derivere

$(10+11t-7(t^2+t^3))/6$ og finne de stasjonere punktene. Den deriverte er lik $(-21t^2-14t+11)/6$. Den deriverte er lik 0 når

$$t = \frac{-7 \pm 2\sqrt{70}}{21}.$$

Dette gir $t = -1.130...$ eller $t = 0.463....$ De stasjonere punktene blir da omtrentlig $(-1.13, -0.21)$ og $(1.46, 2.15)$.)



Oppgave 5

Gitt funksjonen $f(x) = 2\sin(x) - x$ med definisjonsmengde $[0, 2\pi]$.

a) Når vokser $f(x)$ og når avtar $f(x)$?

Den deriverte er lik $f'(x) = 2\cos(x) - 1$. Den er null når $\cos(x) = 1/2$. I intervallen $[0, 2\pi]$ er det for $x = \pi/3$ og $5\pi/3$. Den deriverte er negativ, og $f(x)$ avtagende, for $\pi/3 < x < 5\pi/3$. Den deriverte er positiv, og $f(x)$ voksende, for $0 \leq x < \pi/3$ og $5\pi/3 < x \leq 2\pi$.

b) Finn alle topp- og bunnpunkt til $f(x)$.

De kritsike punktene er endepunktene samt de stasjonere punktene fra *a*). De er $(0,0)$, $(\pi/3, \sqrt{3} - \pi/3)$, $(5\pi/3, -\sqrt{3} - 5\pi/3)$ samt $(2\pi, -2\pi)$. Punktene $(0,0)$ og $(5\pi/3, -\sqrt{3} - 5\pi/3) \approx (5.23, -6.97)$ er lokale minimumspunkt fra førstederivert testen, og punktene $(\pi/3, \sqrt{3} - \pi/3) \approx (1.05, 0.68)$ og $(2\pi, -2\pi)$ er lokale maksimumspunkt fra førstederivert testen.

c) Finn alle vendepunktene til $f(x)$ (hvis den har noen).

Den dobbeltderiverte til f er $f''(x) = -2\sin(x)$. Den er 0 i intervallen $[0, 2\pi]$ når $x = 0, \pi$ og 2π. Den andrederiverte skifter fortegn i punktet $(\pi, -\pi)$. Punktet $(\pi, -\pi)$ er et vendepunkt. Punktene $(0, 0)$ og $(2\pi, -2\pi)$ er ikke vendepunkt siden f ikke skifter konkavitet i de punktene (definisjonsmengden er $[0, 2\pi]$).

d) Lag en skisse av grafen til $f(x)$.