Eksamen i	FO929A - Matematikk
Dato:	3. juni 2013
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	5 (20 deloppgaver)
Antall sider:	2
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1 Deriver følgende funksjoner.

a)

$$f(x) = 2x^3 + (3x)^2 - 21$$

Den deriverte til $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 21$ er lik $\underline{f'(x) = 6x^2 + 18x}$.

b)

$$g(x) = -3x\cos(5x - 1) + 2\pi$$

Den deriverte til $g(x)$ er lik $\underline{g'(x) = -3\cos(5x-1) + 15x\sin(5x-1)}$. Vi har her benyttet produktregelen og kjerneregelen med lineær kjerne.

c)

$$h(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

Funksjonen $h(x)$ er lik $\ln|\sin(x)| - \ln|\cos(x)|$. (uttrykkene er definert når $\cos(x) \neq 0$ og $\sin(x)$ har samme fortegn.) Den deriverte til $h(x)$ er lik $\underline{h'(x) = \cot(x) + \tan(x)}$. Felles nevner og Pytagoras sin sats gir at dette er lik $\underline{1/(\sin(x)\cos(x))}$.

Alternativt kan vi benytte at den deriverte til $\tan(x)$ er lik $1/\cos^2(x)$ og kjerneregelen. Da får vi at

$$h'(x) = (1/\tan(x)) \cdot 1/\cos^2(x) = 1/(\sin(x)\cos(x)).$$

Dette er selvsagt det samme som uttrykket ovenfor.

Løs ulikhetene.

d)

$$x - \frac{1}{x} \geq 1$$

Ulikheten er ekvivalent til ulikheten $(x^2 - x - 1)/x \geq 0$. Røttene til polynomet i telleren er $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Et fortegnsskjema for den rasjonale funksjonen gir derfor at løsningen er $\underline{x \in [(1-\sqrt{5})/2, 0\rangle \cup [(1+\sqrt{5})/2, \infty\rangle.}$

e)

$$2\cos(2x) \geq \sqrt{3} \qquad x \in [0, \pi\rangle$$

La u være lik $2x$. Likningen er ekvivalent til $\cos(u) \geq \sqrt{3}/2$ hvor u tar verdier mellom 0 og 2π. Løsningen er da $u \in [0, \pi/6] \cup [11\pi/6, 2\pi\rangle$. Siden x er lik $u/2$ så blir løsningen til ulikheten

$$\underline{x \in [0, \pi/12] \cup [11\pi/12, \pi\rangle}.$$

Løs differensiallikningen med den opppgitt randbetingelsen.

f)

$$y' \cdot (x^2 + 4) = x \cdot (y + 1) \qquad y(0) = 5$$

Dette er en separabel differensiallikning

$$y'/(y+1) = x/(x^2+4)$$

(når $y \neq -1$). Integrerer vi begge sidene med hensyn til x får vi

$$\ln|y+1| = (1/2) \cdot \ln|x^2+4| + c.$$

Dette gir at $y = k\sqrt{x^2+4} - 1$ hvor k er en reell konstant ulik 0.

Randbetingelsen gir $5 = k\sqrt{4} - 1 = 2k - 1$. Derfor er $k = 3$ og løsningen er

$$\underline{y = 3\sqrt{x^2+4} - 1}.$$

Finn konvergensområde og summen til den (geometriske) rekken.

g)

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + \cdots.$$

Dette er en geometrisk rekke i variabelene $u = e^{-x}$. Den konvergerer til $1/(1-u)$ når $|u| < 1$. Dette svarer til $x > 0$. Rekken konvergerer derfor til

$$\underline{\frac{1}{1-e^{-x}}}$$

med konvergensområde $\underline{x > 0}$.

Oppgave 2 Finn de ubestemte og bestemte integralene (hvis de eksisterer).

a)

$$\int_0^4 \frac{9}{x} + 3\,dx$$

Dette er et uegentlig integral som ikke eksisterer.

b)

$$\int \frac{x+2}{x^2-5x+4}\,dx$$

Vi benytter delbrøkoppspalting og får

$$\int \frac{x+2}{x^2-5x+4}\,dx = \int \frac{2}{x-4} - \frac{1}{x-1}\,dx = \underline{\ln\left|\frac{(x-4)^2}{x-1}\right| + C}$$

c)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\,dx$$

Integralet er 0 siden integranden er en odde funksjon og vi integreer over en symmetrisk interval.

d)

$$\int \frac{3x}{(3x+2)^2}\,dx$$

Vi benytter delbrøkoppspalting og får

$$\int \frac{3x}{(3x+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{(3x+2)} - \frac{2}{(3x+2)^2}\,dx = \underline{(1/3)\ln|3x+2| + \frac{2/3}{3x+2} + C}$$

Oppgave 3 Gitt to funksjoner $f(x) = x^3$ og $g(x) = 4x$.

a) La A være regionen(e) begrenset av $f(x)$ og $g(x)$. Bestem arealet til regionen A.

Funksjonene er like for $x = -2, 0, 2$. Det er to regioner som ligger mellom de to grafene. De to regionenen er like store og speglet om origo.

Arealet mellom grafene er derfor lik

$$2\int_0^2 4x - x^3\,dx = 2(2x^2 - x^4/4\,|_0^2) = \underline{8}.$$

b) Regionen A roteres om x-aksen. Bestem volumet til omdreiningslegemet.

Volumet er lik

$$2\pi\int_0^2 (4x)^2 - (x^3)^2\,dx = 2\pi((16/3)x^3 - x^7/7\,|_0^2) =$$

$$2\pi(2^7/3 - 2^7/7) = \underline{2^{10}\pi/21 = 1024\pi/21}.$$

Oppgave 4 Vi har fire punkt i rommet A, B, C og D slik at $\overrightarrow{AB} = [1, 2, 1]$, $\overrightarrow{AC} = [1, -1, -1]$ og $\overrightarrow{AD} = [2, 1, 2]$.

a) Koordinaten til B er $(3, 5, -2)$. Finn koordinaten til A,C og D.

Koordinaten til $\underline{A \text{ er } (2, 3, -3)}$, koordinaten til $\underline{C \text{ er } (3, 2, -4)}$ og koordinaten til $\underline{D \text{ er } (4, 4, -1)}$.

b) Bestem vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Absoluttverdiene er $|\overrightarrow{AB}| = |[1, 2, 1]| = \sqrt{6}$ og $|\overrightarrow{AC}| = |[1, -1, -1]| = \sqrt{3}$. Prikkproduktet gir at

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2}{3\sqrt{2}}.$$

Vinkelen mellom vektorene er omtrent $\underline{118.1 \text{ grader}}$.

c) Regn ut kryssproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ og finn volumet til pyramiden $ABCD$.

Kryssproduktet er

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-1, 2, -3].$$

Volumet til pyramiden $ABCD$ er

$$(1/6)|\,\overrightarrow{AD} \bullet (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})| = 1.$$

Oppgave 5 Funksjonen $f(x) = e^{-x/\sqrt{3}} \cos(x)$ har definisjonsmengde $[-2, 4\rangle$

a) Bestem når $f(x)$ vokser og når $f(x)$ avtar.

Vi finner de to første deriverte til $f(x)$.

$$f'(x) = e^{-x/\sqrt{3}}(-\sin(x) - \cos(x)/\sqrt{3})$$

$$f''(x) = e^{-x/\sqrt{3}}(2\sin(x)/\sqrt{3} + \cos(x)/(\sqrt{3})^2 - \cos(x)) =$$
$$(2/\sqrt{3})e^{-x/\sqrt{3}}(\sin(x) - (1/\sqrt{3})\cos(x))$$

Den deriverte er lik 0 når $\tan(x) = -1/\sqrt{3}$. I definisjonsmengden er løsningenen $x = -\pi/6, 5\pi/6$. Funksjonen er deriverbar (og da kontinuerlig) og endrer bare monotoniegenskapene hvor $f' = 0$. Fortegnet til f' i, intervallene mellom dens nullpunkter, sjekkes og viser at funksjonen er voksende i intervallene $\underline{[-2, -\pi/6] \text{ og } [5\pi/6, 4\rangle}$ og avtakende i intervallen $\underline{[-\pi/6, 5\pi/6]}$.

b) Finn alle topp- og bunnpunkt til $f(x)$.

Toppunktet er $(-\pi/6, \sqrt{3}e^{\pi/6\sqrt{3}}/2)$.

Bunnpunktene er $(-2, e^{2/\sqrt{3}}\cos(2))$ og $(5\pi/6, -\sqrt{3}e^{-5\pi/6\sqrt{3}}/2)$.

c) Bestem hvor $f(x)$ er konkav opp og konkav ned. Finn eventuelle vendepunkt til $f(x)$.

Den dobbelderiverte er lik 0 når $\tan(x) = 1/\sqrt{3}$. Løsningene er $x = \pi/6$ og $7\pi/6$. Funksjonen skifter konkavitet i begge disse punktene. Funksjonen er konkav opp i intervallen $[\pi/6, 7\pi/6]$ og konkav ned i intervallene $[-2, \pi/6]$ og $[7\pi/6, 4\rangle$. Vendepunktene er $(\pi/6, \sqrt{3}e^{-\pi/6}/2)$ og $(7\pi/6, -\sqrt{3}e^{-7\pi/6}/2)$.

d) Lag en skisse av grafen til $f(x)$.