Eksamen i	FO929A - Matematikk
Dato:	2013
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	5 (20 deloppgaver)
Antall sider:	3
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

Løsningsforslag

Oppgave 1 Deriver følgende funksjoner.

a)
$$f(x) = 3x^{-1} + x^3 \cdot x^7$$

Den deriverte er
$$\underline{f'(x) = -3x^{-2} + 21x^{20}}.$$

b) Den deriverte til
$$(x^6 \sin(x) + 1)/3 = x^6 \sin(x)/3 + 1/3$$

er
$$\underline{g'(x) = x^6 \cos(x)/3 + 2x^5 \sin(x)}.$$

c) Den deriverte til
$$h(x) = \ln|\, x^3 \cdot e^{2x}| = 3\ln|\, x| + 2x$$

er
$$\underline{h'(x) = 3/x + 2}.$$

Løs likningene.

d) Likning
$$(\ln(x))^2 - \ln(x^2) = 8$$

er en annengradslikning i $\ln(x)$ siden $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. La $u = \ln(x)$, da er likiningen $u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2 = 9$. Løsningene til denne likningen er $u = -2$ og $u = 4$. Siden $x = e^u$ så er løsningene $\underline{x = e^{-2} \text{ og } x = e^4}$.

e)

$$\cos(2x) + \cos(x) = 0 \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$

Dette kan greit løses geometrisk. Vi gir her en mer algebraisk fremgangsmåte. Vi benytter at $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ og får en annengradslikning i $\cos(x)$

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0.$$

Uttrykket til venstre faktoriserer som $(2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$ så røttene er $\cos(x) = 1/2$ og $\cos(x) = -1$. I det oppgitte intervallet for x er derfor løsningene $\underline{x = \pi/3,\ x = 5\pi/3 \text{ og } x = \pi}$.

Løs differensiallikningen med den oppgitte randbetingelsen.

f)

$$y' \cdot (4x^2 - 1) = (2x + 1) \cdot (3y + 1) \qquad y(1) = 1$$

Dette er en separabel differensiallikning

$$\int \frac{y'}{3y + 1}\, dx = \int \frac{2x + 1}{4x^2 - 1}\, dx.$$

Den rasjonale funksjonen i integralet til venstre er lik $1/(2x - 1)$ når $x \neq -1/2$. Vi integrer og får

$$(1/3)\ln|3y + 1| = (1/2)\ln|2x - 1| + c$$

Dette gir

$$3y + 1 = k(2x - 1)^{3/2}$$

for $k \neq 0$. Når $k = 0$ har vi også en løsning. Den generelle løsning er derfor

$$y(x) = k(2x - 1)^{3/2} - 1/3$$

for et reelt tall k. Setter vi inn $x = 1$ får vi at $k = 4/3$ derfor er løsningen til randverdiproblemet

$$\underline{y(x) = (4(2x - 1)^{3/2} - 1)/3}.$$

Bestem summen til den geometriske rekken.

g)

$$1 - (2/3)^2 + (2/3)^4 - (2/3)^6 + (2/3)^8 - \cdots.$$

Dette er en geometrisk rekke hvor kvotienten er $-4/9$. Summen eksisterer og er lik $1/(1 - (-4/9)) = \underline{9/13}$.

Oppgave 2 Regn ut de ubestemte og bestemte integralene.

a)
$$\int_{-2}^{2} 5x^3 - x^2 + 3x\,dx$$

Siden $5x^3 + 3x$ er odde funksjoner så er integraler lik

$$\int_{-2}^{2} -x^2\,dx = -x^3/3|_{-2}^{2} = \underline{-16/3}.$$

b) Polynomdivisjon gir at

$$\int \frac{x^2}{x^2-2x+2}\,dx = \int 1 + \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx.$$

Telleren i integranden er lik den deriverte til nevneren så variabelskifte gir at det ubestemte integralet er lik

$$\underline{x + \ln|x^2 - 2x + 2| + C}.$$

c)
$$\int_{1/e}^{e} \ln(x)\,dx$$

Delvis integrasjon gir at

$$\int_{1/e}^{e} \ln(x)\,dx = x\ln|x| - x|_{1/e}^{e} = (e + 1/e)\ln(e) - (e - 1/e) = \underline{2/e}.$$

d)
$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx$$

Siden den deriverte av $\sin(x)$ er lik $\cos(x)$ gir variabelskifte at det ubestemte integralet er lik

$$\underline{-1/\sin(x) + C}$$

Oppgave 3

a) Bestem alle trekanter som er rettvinkla og hvor to av sidene har lengde 5 og 12. Bestem lengden til den tredje siden og bestem vinklene i trekantene.

Det er to slike trekanter. En hvor sidene med lengde 5 og 12 er kateter og en hvor siden med lengde 12 er hypotenus. Ved Pytagoras sin setning har trekantene sider av lengde 5 ,12 og 13 i første tilfelle og sider av lengde 5 , $\sqrt{119}$ og 12 i det andre tilfellet. Vinklene er 90°, $\arccos(5/13) =$ 67.4° og 22.6° i første tilfellet og 90°, $\arccos(5/12) = 65.4°$ og 24.6° i andre tilfellet.

b) I en trekant ABC er vinkelen $\angle A = 45°$. Eit punkt P er plassert på linjestykke AC slik at avstanden AP er lik 3 og vinkelen $\angle BPC$ er $75°$. Bestem lengden på siden AB.

Sinussetningen gir at lengden AB er lik $3cm \sin(105°)/\sin(30°) = \underline{5.8cm}$

Oppgave 4 Vi har to punkt i rommet A med koordinater $(2, -3, 4)$ og B med koordinater $(-3, 2, 19)$.

a) Bestem vektoren $\overrightarrow{AB}$ og regn ut absoluttverdien til vektoren. Gi en parametrisering av linjen L som går gjennom punktene A og B.

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ er lik $\underline{[-5, 5, 15]} = 5[-1, 1, 3]$. Lengden til vektoren er lik $|\overrightarrow{AB}| = \underline{5\sqrt{11}}$.

En parametrisering av linjen mellom A og B er

$$\underline{[x, y, z] = [2, -3, 4] + [-1, 1, 3]t}$$

for en parmeter t

b) Finn koordinaten til alle punkt på linjen L med egenskapen at avstanden til B er 4 ganger så lang som avstanden til A.

Det er to slike punkt. Det ene mellom A og B og har koordinat $\underline{(1, -2, 7)}$. Den andre punktet ligger utenfor linjestykke AB. Avstanden til A er en tredel av avstanden mellom A og B koordinaten til det punktet er $\underline{(11/3, -14/3, -1)}$.

c) Et punkt D er slik at $\overrightarrow{AD} = [2, -2, -1]$. La K være linjen som går gjennom punktene A og D.

Beskriv planet P som inneholder de to linjene K og L. Planet kan beskrives på følgende form $ax + by + cz + d = 0$.

Vektorproduktet

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 25[1, 1, 0].$$

Derfor er $[1, 1, 0]$ er derfor en normalvektor. Siden punktet A ligger i planet så er likningen for planet

$$x + y = 1 = 0.$$

d) La punktet E ha koordinater $(1, 1, 1)$. Bestem den korteste avstanden fra planet P til punktet E.

Vektoren $\overrightarrow{AE}$ er $[-1, 4, -3]$. Korteste avstand fra punktet E til planet er lik lengden på komponenten til vektoren $\overrightarrow{AE}$ som står vinkelrett på] planet. Dette er

$$\overrightarrow{AE} \cdot [1, 1, 0]/\sqrt{2} = 2/\sqrt{2} = \underline{\sqrt{2}}.$$

Oppgave 5 La $f(x) = x^2 e^{-x}$ ha definisjonsmengde $[0, \infty\rangle$.

a) Bestem når $f(x)$ vokser og når $f(x)$ avtar. Bestem alle topp- og bunnpunktene til $f(x)$.

De to første deriverte til $f(x)$ er

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x} = ((x-2)^2 - 2)e^{-x}.$$

Funksjonen er større eller lik 0 for alle $x \in [0, \infty\rangle$. Siden $f(0) = 0$ er $(0,0)$ et punnpunkt. Den deriverte er lik 0 når $x = 2$ og den dobbelderiverte er da lik $-2e^{-2} < 0$. Derfor er $(2, 4e^2)$ et maksimumspunkt. Funksjonen er økend i intervallen $[0, 2]$ og avtagende i intervallen $[2, \infty\rangle$.

Funksjonen har vendepunkt når $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Vendepunkten er

$$(2+\sqrt{2}, (2+\sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})}) \qquad (2-\sqrt{2}, (2-\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}}).$$

b) Bestem hvor $f(x)$ er konkav opp og konkav ned. Finn eventuelle vendepunkt til $f(x)$.

Funksjonen har vendepunkt når $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Vendepunkten er

$$(2+\sqrt{2}, (2+\sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})}) \qquad (2-\sqrt{2}, (2-\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}}).$$

Funksjonen er konkav ned i intervallen $[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$ den er konkav opp i intervallene $[0, 2-\sqrt{2}]$ og $[2+\sqrt{2}, \infty\rangle$.

c) Bestem eventuelle asymptoter til $f(x)$ og lag en skisse av grafen til $f(x)$.

Funksjonen har en horisontal asymptote gitt ved $y = 0$.