Eksamen i	FO929A - Matematikk
Dato:	2014
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	5 (20 deloppgaver)
Antall sider:	3
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1 Deriver følgende funksjoner

a)

$$f(x) = -2x^{-3} + 4x^3 - 17$$

LF: $f'(x) = 6/x^4 + 12x^2$

b)

$$g(x) = (\sin(x^4) + 4)/4$$

LF: $g'(x) = x^3 \cos(x^4)$

c)

$$h(x) = e^{x \ln x}$$

LF: $(\ln(x) + 1)e^{x \ln x} = (\ln(x) + 1)x^x$

Løs følgende likninger

d)

$$10^{x^2-7} = 100$$

LF: Løsningene er $x = -3$ og $x = 3$.

e)

$$\cos(x) = 1/2 \qquad x \in [0, 3\pi\rangle$$

LF: Løsningene i intervallet er $x = \pi/3, 5\pi/3$ og $7\pi/3$.

f)

$$x^5 - x^3 - x = 0$$

LF: Løsningen til likningen $x((x^2)^2 - x^2 - 1) = 0$ er $x = 0$, $x = \sqrt{(1+\sqrt{5})/2}$ og $x = -\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}$

Oppgave 2 Regn ut de ubestemte og bestemte integralene.

a)

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos(x) + 1\, dx$$

LF: $\frac{\sqrt{3}-1}{3} + \frac{\pi}{6}$

b)

$$\int_{-1}^{2} xe^{x^2-1}\, dx$$

LF: $e^{x^2-1}/2|_{-1}^{2} = (e^3-1)/2$

c)

$$\int x\ln(x)\, dx$$

LF: $x^2\ln(x)/2 - x^2/4 + C$

d)

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\, dx$$

LF: $\tan^2(x)/2 + C$

Oppgave 3

a) Løs ulikheten

$$\frac{x^2-3}{x} \geq -2$$

LF: Dette er det samme som ulikheten

$$\frac{x^2+2x-3}{x} \geq 0$$

Telleren faktoriserer som $x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$. Løsningsmengden er unionen av delmengdene $x \leq -3$ og $0 < x \leq 1$.

b) Bestem summen til følgende geometriske rekke

$$1/3 - (1/3)^2 + (1/3)^3 - (1/3)^4 + (1/3)^5 - \cdots$$

LF: Summen er

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(-1/3)} = \frac{1}{4}$$

c)

Et legeme formes ved å rotere grafen til funksjonen $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ om x-aksen. Finn volumet til den delen av legemet som ligger mellom de to flatene gitt ved $x = 0$ og $x = 3$.

LF: Volumet er lik integralet

$$\int_0^3 \pi(\sqrt{x^2+1})^2\,dx = \pi \int_0^3 x^2 + 1\,dx = \pi(9+3) = 12\pi$$

Oppgave 4 Vi har to punkter i rommet, A med koordinater $(1, -2, 3)$ og B med koordinater $(-3, 2, 1)$.

a) Bestem vektoren $\overrightarrow{AB}$ og regn ut absoluttverdien til vektoren. Gi en parametrisering av linjen L som går gjennom punktene A og B.

LF: Koordinatene til vektoren er $\overrightarrow{AB} = [-4, 4, -2]$. Absoluttverdien til vektoren er

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

En parametrisering er gitt ved

$$x = 1 - 4t, y = -2 + 4t, z = 3 - 2t$$

for reelle tall t.

b) Et punkt C er slik at $\overrightarrow{AC} = [3, 2, 1]$. Bestem vinkelen mellom linjene L og linjen som går gjennom punktene A og C.

LF: Vinkelen mellom vektorene $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}$ er gitt ved

$$\arccos\left(\frac{[-4, 4, -2] \bullet [3, 2, 1]}{6 \cdot \sqrt{9+4+1}}\right) = 105.5^\circ$$

Vinklene mellom linjene (som er mellom 0 og 90 grader) er defor tilnærmet lik 74.5°.

c) Et annet punkt D er slik at $\overrightarrow{AD} = [2, -2, -1]$. Bestem volumet til tetraederet som har hjørner i de fire punktene A, B, C og D.

LF: Volumet er absoluttverdien av en sjettedel av trippelproduktet mellom $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$.

$$\frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{matrix} \right\| = \frac{20}{3}$$

Oppgave 5 Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{(x+3/2)^2 + 3/4}{x+1} - 1$$

a) Finn den største definisjonmendgen til funksjonen. Finn eventuelle skrå, horisontale eller vertikale asymptoter til $f(x)$.

LF: Vi skriver først om det rasjonale uttrykket.

$$f(x) = \frac{(x+3/2)^2 + 3/4}{x+1} - 1 = \frac{x^2 + 3x + (9+3)/4)}{x+1} - 1 = x + 2 + \frac{1}{x+1}$$

Grafen til $f(x)$ har derfor en vertikal asymptote $x = -1$ og en skrå asymptote $y = x + 1$. Den har ingen horisontale asymptoter.

b) Finn eventuelle nullpunkter til $f(x)$.

LF: Funksjonen er lik 0 når $x^2 + 2x + 2 = 0$ (og $x \neq -1$). Funksjonen har derfor ingen nullpunkt.

c) Bestem når $f(x)$ vokser og når $f(x)$ avtar. Bestem alle topp- og bunnpunktene til $f(x)$.

LF: Den deriverte til $f(x)$ er lik$f'(x) = 1 - 1/(x+1)^2$. Denne er lik 0 når $(x+1)^2 = 1$. Det er når $x = -2$ og når $x = 0$.

Den dobbelderiverte til $f(x)$ er lik $f''(x) = 2/(x+1)^3$. Ved andrederiverttesten er derfor $(0, 2)$ et lokalt bunnpunkt og $(-2, -2)$ et lokalt maksimumspunkt.

d) Bestem hvor $f(x)$ er konkav opp (krummer opp) og konkav ned (krummer ned). Finn eventuelle vendepunkt til $f(x)$. Skisser av grafen til $f(x)$.

LF: Siden $f''(x) = 2/(x+1)^3$ er positiv for $x > -1$ og negativ for $x < -1$ så er $f(x)$ konkav opp for $x > -1$ og konkav ned for $x < -1$.