høgskolen i oslo
www.hio.no

Avdeling for ingeniørutdanning

Eksamen i Matematikk

Dato: 2. juni 2009

Tid: 09.00 – 14.00

Antall sider inklusive forside: 5

Antall oppgaver: 5

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Faglig veileder: Eivind Eriksen, Halvard Fausk

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse): Annen lærer	Sensor	Studieleder/ Fagkoordinator	Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
Eivind Eriksen Halvard Fausk	Halvard Fausk Eivind Eriksen			Tia Johannesen

Emnekode:

F0929A

Eksamen i	FO929A Matematikk
	Ordinær Eksamen
Dato	2. juni 2009
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	5
Vedlegg	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator

Oppgave 1

Deriver følgende funksjoner:

a) $f(x) = 9x^3 - 14x + \sqrt{24}$

b) $f(x) = (x+1)\sin(2x)$

c) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

d) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 3}$

e) $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x+2})$

Finn likningene til følgende tangenter ved regning:

f) Tangentene i eventuelle punkter med $x = 3$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 25$.

Oppgave 2

Vi ser på funksjonen $f(x) = (x^2 - 4x + 4) \cdot e^x$.

a) Finn eventuelle nullpunkter for f ved regning. Svarene skal gis eksakt.

b) Vis at $f'(x) = x(x-2)e^x$.

c) Sett opp et fortegnsskjema for $f'(x)$, og bruk dette til å finne koordinatene til alle lokale topp- og bunnpunkter for f. Svarene skal gis eksakt.

d) Finn $f''(x)$ og x-koordinatene til eventuelle vendepunkter for f. Svarene skal gis eksakt. Tegn en skisse av grafen til f.

Oppgave 3

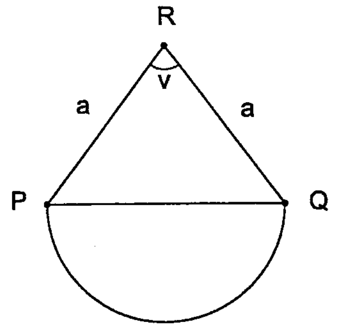
Punktene A, B, C i xyz-koordinatsystemet har alle avstand 4 fra origo O. Punktet A ligger på den positive x-aksen, punktet B ligger i første kvadrant av xy-planet, og punktet C ligger i første kvadrant av yz-planet. Videre er $\angle AOB = \angle BOC = 60°$.

a) Finn koordinatene til A, B og C.

b) Bestem volumet av den trekantede pyramiden $OABC$.

Oppgave 4

Et parkanlegg har form som på figuren. Den består av en likebenet trekant $\triangle PQR$ der $PR = QR = a$ og $\angle R = v$, samt en halv sirkelflate med diameter lik PQ.



a) Finn PQ uttrykt ved a og v.

b) Vis at arealet A av anlegget kan skrives som

$$A = \frac{a^2}{4}(2\sin v - \pi\cos v + \pi)$$

c) La a ha en fast verdi. Bestem v slik at arealet blir størst mulig. Finn det største arealet når $a = 22$ meter. Oppgi arealet i nærmeste hele kvadratmeter.

Oppgave 5

Regn ut følgende ubestemte integraler:

a) $\int(12x^3 + 4e^x - 7)\,dx$

b) $\int(1/x^2 + 2/x + 3/\sqrt{x})\,dx$

c) $\int \frac{x^2-5x+1}{x^2-5x-6}\,dx$

d) $\int \sin x \cos x\,dx$

Løs differensiallikningen med den gitte startbetingelsen:

e) $y' \cdot (\sin x + 1) = y \cdot \cos x, \quad y(0) = 1/2$

Finn følgende areal ved regning:

f) Arealet av området begrenset av grafen til $y = \sin x + \cos x$, x-aksen og de to linjene $x = 0$ og $x = 3\pi/2$.

g) Arealet av området begrenset av grafen til $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 1$.

FORMELSAMLING FOR MATEMATIKK FORKURS

1. Algebra

1.1. Kvadratsetningene.

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.2. Løsning av andregradslikningen.

a) Løsning av likningen $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.3. Potenser med fast grunntall.

a) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
b) $a^p / a^q = a^{p-q}$
c) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

1.4. Potenser med fast eksponent.

a) $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
b) $a^p / b^p = (a/b)^p$

1.5. Potenser som røtter.

a) $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

2. Rekker

2.1. Aritmetiske rekker.

a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
b) $S_n = n \cdot (a_1 + a_n)/2$

2.2. Geometriske rekker.

a) $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
b) $S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$
c) $S = \frac{a_1}{1-k}$ for $|k| < 1$

3. Trigonometri

3.1. Identiteter.

a) $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$
b) $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$
c) $\sin(-u) = -\sin u$
d) $\cos(-u) = \cos u$
e) $\sin(180° - u) = \sin u$
f) $\cos(180° - u) = -\cos u$

3.2. Addisjonsformler.

a) $\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$
b) $\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$
c) $\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \cdot \tan v}$
d) $\sin(2u) = 2 \sin u \cdot \cos u$
e) $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$
f) $\tan(2u) = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$

3.3. Eksakte verdier for noen vinkler.

a)

u	u(rad)	$\sin u$	$\cos u$	$\tan u$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	–

3.4. Harmoniske svingninger.

a) $f(t) = A \sin(\omega(t - \phi)) + c$
b) $T = 2\pi/\omega$

4. Geometri

4.1. Rette linjer.

a) Likning: $y = ax + b$
b) $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

4.2. Trekanter.

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
b) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
c) Areal trekant: $\frac{1}{2}\, bc \cdot \sin A$

4.3. Sirkler.

a) Likning: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
b) Areal sirkel: $A = \pi r^2$
c) Omkrets sirkel: $O = 2\pi r$
d) Areal sirkelsektor: $A = 1/2\, r^2\, v$
e) Buelengde sirkelsektor: $b = r\, v$

4.4. Volum og overflate.

a) Volum prisme/sylinder: $V = G\, h$
b) Volum pyramide/kjegle: $V = 1/3\, G\, h$
c) Volum kule: $V = 4/3\, \pi r^3$
d) Overflate kule: $O = 4\pi r^2$

5. Vektorer

5.1. Skalarprodukt.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$

5.2. Vektorer i planet.

a) $(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$
b) $c \cdot (x, y) = (cx, cy)$
c) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$
d) $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$

5.3. Vektorer i rommet.

a) $(x_1, y_1, z_1) \pm (x_2, y_2, z_2)$
$= (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$

b) $c \cdot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$

c) $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2)$
$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

d) $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

e) $(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2)$
$= (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$

6. Logaritmer

6.1. Naturlige logaritmer:

a) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

b) $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

c) $\ln(a^p) = p \cdot \ln a$

6.2. Logaritmer med andre grunntall.

a) $\log_a(x) = \ln(x) / \ln(a)$

7. Derivasjon

7.1. Derivasjonsregler:

a) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

b) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ for c konstant

c) Produkt: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

d) Kvosient: $(u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2$

e) Kjerneregelen: $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$

7.2. Den deriverte til noen funksjoner:

a) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

b) $(\sin x)' = \cos x$

c) $(\cos x)' = -\sin x$

d) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

e) $(e^x)' = e^x$

f) $(\ln x)' = 1/x$

8. Integrasjon

8.1. Integrasjonsregler:

a) $\int (u \pm v) \,\mathrm{d}x = \int u \,\mathrm{d}x \pm \int v \,\mathrm{d}x$

b) $\int c \cdot u \,\mathrm{d}x = c \cdot \int u \,\mathrm{d}x$ for c konstant

c) Delvis integrasjon:

$$\int u' \cdot v \,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v' \,\mathrm{d}x$$

d) Substitusjon:

$$\int f(u) \cdot u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \, du$$

8.2. Integralet av noen funksjoner:

a) $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ for $n \neq -1$

b) $\int 1/x \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

c) $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

d) $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$

e) $\int (\tan^2 x + 1) \,\mathrm{d}x = \tan x + C$

f) $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$