Heldagsprøve i FO929A – matematikk	
Dato:	7. desember 2010
Tidspunkt:	09:00 – 14:00
Antall oppgaver	4
Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Alle svar skal grunngis.
Forsøk å gi svarene eksakt der det er mulig.

Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned}
&3x^2 - 3x - 36 = 0 \\
&x^2 - x - 12 = 0 \\
x \;=\; &\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} \\
&\underline{\underline{x = \frac{1+7}{2} = 4 \;\vee\; x = \frac{1-7}{2} = -3}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&x^5 - 5^3 = 3000 \\
&x^5 = 3000 + 5^3 = 3125 \\
&\underline{\underline{x = \sqrt[5]{3125} = 5}}
\end{aligned}$$

c) $\cos v = \frac{1}{2}, \quad 0^\circ \le v < 360^\circ$
$\cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ$.
Av enhetssirkelen ser vi at $v = -60^\circ$ også er en løsning. Den generelle løsningen blir da: $v = 60^\circ + n\cdot 360^\circ$ eller $v = -60^\circ + n\cdot 360^\circ$, der $n \in \mathbb{Z}$. Siden v skal ligge i første omløp, får vi:

$$\underline{\underline{v = 60^\circ \;\vee\; v = -60^\circ + 360^\circ = 300^\circ}}.$$

d) $\sin v + \cos v = 0, \quad 0 \leq v < 4\pi.$
Antar $\cos v \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin v}{\cos v} + \frac{\sin v}{\cos v} &= 0 \\ \tan v &= -1 \end{aligned}$$

$\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
Generell løsning: $v = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$.
For $v \in [0, 4\pi\rangle$ får vi løsninger for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ og $n = 4$:

$$\underline{\underline{v = \frac{3\pi}{4} \ \vee \ v = \frac{7\pi}{4} \ \vee \ v = \frac{11\pi}{4} \ \vee \ v = \frac{15\pi}{4}}}\ .$$

e)

$$\begin{aligned} -2x + y &= 5 \quad (I) \\ -x + 4y &= 13 \quad (II). \end{aligned}$$

Likn. (I): $y = 2x + 5$. Setter (I) inn i (II):

$$\begin{aligned} -x + 4(2x + 5) &= 13 \\ -x + 8x + 20 &= 13 \\ 7x &= 13 - 20 = -7 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Likn. (I): $y = 2 \cdot (-1) + 5 = 3$.
Løsning:

$$\underline{\underline{x = -1 \ \wedge \ y = 3}}.$$

f)

$$\begin{aligned} 2x + 3 &< 7(x + 1) \\ 2x - 7x &< 7 - 3 \\ -5x &< 4 \\ \frac{-5x}{-5} &> \frac{4}{-5} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x > -\frac{4}{5}}}\ .$$

g)

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2 - x - 40}{x-2} &\geq 2 \\
\frac{3x^2 - x - 40 - 2(x-2)}{x-2} &\geq 0 \\
\frac{3x^2 - 3x - 36}{x-2} &\geq 0
\end{aligned}$$

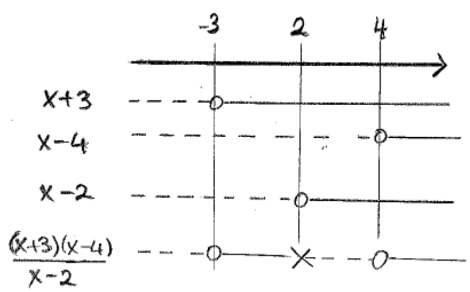
Vi ser at vi fant nullpunktene til telleren i oppg. 1 a). Dermed har vi også faktoriseringen av telleren:

$$3x^2 - 3x - 36 = 3(x+3)(x-4).$$

Altså:

$$\begin{aligned}
\frac{3(x+3)(x-4)}{x-2} &\geq 0 \\
\frac{(x+3)(x-4)}{x-2} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Fortegnsskjema:



Løsning:

$$\underline{\underline{-3 \leq x < 2 \ \vee \ x \geq 4}}.$$

h)
$$8\sin v + 4\cos^2 v = 7, \quad 0^\circ \le v < 360^\circ.$$

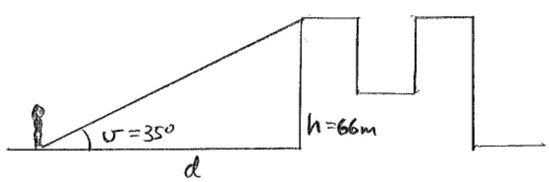
Vi bruker sammenhengen $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$:

$$\begin{aligned}
8\sin v + 4(1-\sin^2 v) &= 7\\
-4\sin^2 v + 8\sin v - 3 &= 0\\
\sin v = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-3)}}{2\cdot(-4)} &= \frac{-8\pm 4}{-8} = \frac{2\mp 1}{2}\\
\sin v = \frac{1}{2} \ \vee \ \sin v = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Siden $\sin v$ aldri kan bli større enn 1, vil ikke likninga
$\sin v = 3/2$ gi noen løsning.
$\sin^{-1}\frac{1}{2} = 30^\circ$.
Av enhetssirkelen ser vi at at $v = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ også er en løsning. Dette er alle løsningene når v skal ligge i første omløp.
Altså:

$$\underline{\underline{v = 30^\circ \ \vee \ v = 150^\circ}}.$$

Oppgave 2



a) Av figuren ser vi at $\tan v = h/d$ slik at
$d = \frac{h}{\tan v} = \frac{66\ m}{\tan 35^\circ} \approx 94,3\ m.$
<u>Kari står 94,3 m frå Rådhuset.</u>

b) Cossinussetninga gir at

$$\begin{aligned}
(AB)^2 &= (AC)^2 + (BC)^2 - 2(AC)\cdot(BC)\cos C =\\
&\quad 16.1^2 + 9,0^2 - 2\cdot 16.1\cdot 9,0\cos 28^\circ \approx 84,33\\
&\quad \underline{\underline{AB = \sqrt{84,33} = 9,183 \approx 9,2}}.
\end{aligned}$$

Sinussetninga gir:

$$\begin{aligned}\frac{\sin B}{AC} &= \frac{\sin C}{AB} \\ \sin B &= \frac{AC}{AB}\sin C = \frac{16,1}{9,183}\sin 28^\circ \approx 0,8231 \\ \sin^{-1} 0,8231 &= 55,40^\circ.\end{aligned}$$

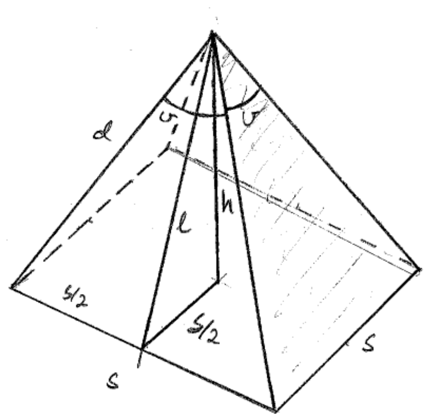
Det betyr at $\angle B = 55,40^\circ$ eller at $\angle B = 180^\circ - 55,40^\circ \approx 124,6^\circ$. Av figuren ser vi at det er den siste løsningen som er riktig; $\underline{\underline{\angle B = 124,6^\circ}}$.
Siden $\angle A + \angle B + \angle C = 189^\circ$, får vi at $\underline{\underline{\angle A = 180^\circ - 28^\circ - 124,6^\circ = 27,4^\circ}}$.

c) Volumet er $V = Gh/3$ der $h = 138,8\ m$ er høyden av pyramiden. Grunnflatearealet $G = s^2$, der $s = 230,4\ m$ er lengda av sidekantene.

$$V = \frac{1}{3}s^2h = \frac{1}{3}\cdot(230,4\,m)^2\cdot 138,8\,m = 2,456\cdot 10^6\ m^3 \approx 2,46\cdot 10^6\ m^3.$$

$\underline{\underline{\text{Volumet er } 2,46\cdot 10^6\ m^3}}$.

d) Av figuren under ser vi at trekanten med sider l, h og $s/2$ danner en rettvinkla trekant.
Pytagoras setning gir da at



$$l^2 = (s/2)^2 + h^2 = (230,4\ m/2)^2 + (138,8\ m)^2 = 32536\ m^2.$$

Videre er trekanten med sider d, $s/2$ og l også rettvinkla. Pytagoras setning gir her at

$$d^2 = (s/2)^2 + l^2 = (230,4\ m/2)^2 + 32536\ m^2 = 45808\ m^2,$$

slik at sidekanten har lengda

$$d = \sqrt{45808\ m^2} = \underline{\underline{214,0\ m}}.$$

e) Av figuren over ser vi at vinkelen v oppfyller

$$\sin\frac{v}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{d} = \frac{s}{2d} = \frac{230,4\ m}{2 \cdot 214,0\ m} = 0,5383.$$

Derfor får vi at vinkelen $v = 2\sin^{-1} 0,5383 \approx \underline{\underline{65,1^\circ}}$.

Oppgave 3

$A(2,1,-3)$, $B(5,2,2)$, $C(3,-2,2)$.

a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [5-2, 2-1, 2-(-3)] = [3,1,5] \\
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{3^2+1^2+5^2} = \underline{\underline{\sqrt{35}}} \\
\overrightarrow{AC} &= [3-2, -2-1, 2-(-3)] = [1,-3,5] \\
|\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{1+(-3)^2+5^2} = \underline{\underline{\sqrt{35}}} \\
\overrightarrow{BC} &= [3-5, -2-2, 2-2] = [-2,-4,0] \\
|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{20} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}.
\end{aligned}$$

b) Definisjonen av skalarprodukt gir:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A \\
\cos A &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{[3,1,5]\cdot[1,-3,5]}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{35}} = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot(-3) + 5\cdot 5}{35} = \frac{5}{7} \\
\angle A &= \cos^{-1}\frac{5}{7} \approx \underline{\underline{44,4^\circ}}.
\end{aligned}$$

c) Arealet T kan vi finne ved formelen $T = 1/2\,|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin A$. Videre veit vi at $\cos A = 5/7$. Dermed gir formelen $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ at

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-(5/7)^2} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

(Vi veit at $\sin A$ skal vere positiv siden alle vinklene i en trekant må ligge mellom $0°$ og $180°$.) Dermed blir arealet

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{35} \cdot \sqrt{35} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 7} = \underline{\underline{5\sqrt{6}}}.$$

d) Linja l skal stå normalt på $\triangle ABC$. Derfor må l være parallell med $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \quad &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \\ &\vec{e}_1 \cdot 1 \cdot 5 + \vec{e}_2 \cdot 5 \cdot 1 + \vec{e}_3 \cdot 3 \cdot (-3) - \vec{e}_3 \cdot 1 \cdot 1 - \vec{e}_1 \cdot 5 \cdot (-3) - \vec{e}_2 \cdot 3 \cdot 5 = \\ &[20, -10, -10] = -10 \cdot [-2, 1, 1].\end{aligned}$$

Dermed er l parallell med vektoren $[-2, 1, 1]$. Siden l skal gå gjennom punktet $A(2, 1, -3)$, kan vi sette opp denne parameterframstillinga:

$$\begin{cases} x &= 2 - 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= -3 + t. \end{cases}$$

e) Punktet D skal ha x-, y- og z-koordinater som oppfyller parameterframstillinga over. Videre skal vi ha at $z = -8$. Det gir at $-8 = -3 + t$, som igjen gir at $t = -8 + 3 = -5$. Dermed får vi at $x = 2 - 2 \cdot (-5) = 12$ og $y = 1 + (-5) = -4$. Punktet D har altså koordinatene $\underline{\underline{(12, -4, -8)}}$.

Oppgave 4

$\vec{u} = [4, -1]$, $\vec{v} = [2+s, -1+3s]$.

a) For at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skal stå normalt på hverandre, må skalarproduktet mellom dem vere 0:

$$\begin{aligned}
&\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\
&[4, -1] \cdot [2+s, -1+3s] = 0 \\
&4(2+s) + (-1)(-1+3s) = 0 \\
&8 + 4s + 1 - 3s = 0 \\
&s + 9 = 0 \\
&\underline{\underline{s = -9}}
\end{aligned}$$

b) To vektorer i planet på komponentform som begge er ulike nullvektor, er parallelle hvis og bare hvis determinanten mellom dem er 0:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2+s & -1+3s \end{vmatrix} = 0 \\
&4(-1+3s) - (-1)(2+s) = 0 \\
&-4 + 12s + 2 + s = 0 \\
&13s = 2 \\
&\underline{\underline{s = \frac{2}{13}}}.
\end{aligned}$$

c) Avstanden fra A til x-aksen er det samme som y-komponenten til A, som er 5.
$\overrightarrow{FA} = [8-4, 5-2] = [4, 3]$ slik at $|\overrightarrow{FA}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Altså er avstanden mellom A og F lik avstanden mellom A og x-aksen.

d) På samme måte som over, er avstanden mellom P og x-aksen lik y.
$\overrightarrow{FP} = [x-4, y-2]$ slik at $|\overrightarrow{FP}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$. Siden disse avstandene skal være like, får vi

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} \\
y^2 &= (x-4)^2 + (y-2)^2.
\end{aligned}$$

e) Likninga over gir

$$\begin{aligned}
y^2 &= x^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot x + y^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot y \\
y^2 - y^2 + 4y &= x^2 + 20 - 8x \\
y &= \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5
\end{aligned}$$

Vi ser at likninga beskriver en andregradsfunksjon. Grafen til en slik funksjon kaller vi en $\underline{\underline{\text{parabel}}}$.
Vi finner skjæringspunktet med y-aksen ved å sette $x = 0$. Dette gir at $y = 1/4 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$ slik at skjæringspunktet blir $\underline{\underline{(0,5)}}$.