Kontinuasjonseksamen i	FO929A - Matematikk
	Vår 2011
Målform:	Nynorsk
Talet på oppgåver:	5
Talet på sider:	3
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Løysingsforslag

Oppgåve 1

a)

$$\begin{aligned} a(x) &= 2x^3 - (4x)^5 - 8 \\ a'(x) &= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot (4x)^4 \cdot 4 - 0 = \underline{\underline{6x^2 - 20(4x)^4}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} b(x) &= x \ln\left(x^2+1\right) \\ b'(x) &= (x)' \cdot \ln\left(x^2+1\right) + x \cdot \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' = \\ & 1 \cdot \ln\left(x^2+1\right) + x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \underline{\underline{\ln\left(x^2+1\right) + \frac{2x^2}{x^2+1}}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} c(t) &= \sqrt{1-3t} + \pi - 2t\sin t = (1-3t)^{1/2} + \pi - 2t\sin t \\ c'(t) &= \frac{1}{2}(1-3t)^{-1/2} \cdot (-3) + 0 - ((2t)' \cdot \sin t + 2t \cdot (\sin t)') = \\ & \underline{\underline{-\frac{3}{2\sqrt{1-3t}} - 2\sin t - 2t\cos t}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} d(x) &= 2x^{\pi} + 3\pi^{x} = 2x^{\pi} + 3e^{\ln\pi \cdot x} \\ d'(x) &= 2 \cdot \pi x^{\pi-1} + 3e^{\ln\pi x} \cdot \ln\pi = \underline{\underline{2\pi x^{\pi-1} + 3\ln\pi \cdot \pi^{x}}} \end{aligned}$$

Oppgåve 2

a)

$$\int \left(\frac{4}{x} - \frac{\sqrt{x}}{3} - 17x^{3,33} \right) dx = 4 \int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{3} \int x^{1/2}\, dx - 17 \int x^{3,33}\, dx =$$
$$4 \ln|x| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{1/2+1} - \frac{17}{3,33+1} x^{3,33+1} + C =$$
$$\underline{\underline{\ln x^4 - \frac{2}{9} x^{3/2} - \frac{17}{4,33} x^{4,33} + C}}$$

b) Delvis integrasjon: $\int u'v\, dx = uv - \int uv'\, dx$

$$u' = x^2 \Leftarrow u = \frac{1}{3}x^3$$
$$v = \ln(4x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$$
$$\int x^2 \ln(4x)\, dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(4x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(4x) - \frac{1}{3} \int x^2\, dx =$$
$$\underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 \ln(4x) - \frac{1}{9}x^3 + C}}$$

c) Variabelskifte:

$$u(x) = \cos x$$
$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$
$$dx = -\frac{du}{\sin x}$$
$$u(0) = \cos 0 = 1$$
$$u(\pi/3) = 1/2$$

$$\int_0^{\pi/3} 3 \sin x \cos^3 x\, dx = -3 \int_1^{1/2} \sin x \cdot u^3 \frac{du}{\sin x} = +3 \int_{1/2}^{1} u^3\, du =$$
$$3 \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_{1/2}^{1} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2^4} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} = \underline{\underline{\frac{45}{64}}}$$

d) $f(x) = \sin x$ og $g(x) = x(x - \pi)$

For å finne arealet avgrensa av kurvene, må vi fyrst finne punkta der grafane til funksjonane skjer kvarandre. Vi veit at $f(x) = \sin x$ er 0 når $x = 0$ og når $x = \pi$. Det same gjeld $g(x)$; $g(0) = g(\pi) = 0$. Vidare er $g(x)$ negativ når $x \in \langle 0, \pi\rangle$ og $f(x)$ er positiv i dette intervallet. Arealet vert dermed:

$$\int_0^\pi (f(x) - g(x))\ dx = \int_0^\pi \left(\sin x - x^2 + \pi x\right)\ dx =$$
$$\left[-\cos x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{2}x^2\right]_0^\pi = -\cos\pi - \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2} - (-\cos 0 - 0 + 0) =$$
$$1 + \frac{\pi^3}{6} + 1 = \underline{\underline{2 + \frac{\pi^3}{6}}}$$

e) $p(x) = 0{,}01(x^7 + 1)$, $D_p = [0,\ 1{,}3]$
Om vi roterar funksjonen p kring x-aksen, får omdreiingslekamen same form som luren. Volumet, i m^3, vert dermed gitt ved integralet

$$\pi\int_0^{1{,}3} (p(x))^2\ dx = \pi\cdot(0{,}01)^2\int_0^{1{,}3}(x^7+1)^2\,dx =$$
$$0{,}0001\pi\int_0^{1{,}3}\left(x^{14} + 2x^7 + 1\right)\ dx = 0{,}0001\pi\left[\frac{1}{15}x^{15} + \frac{2}{8}x^8 + x\right]_0^{1{,}3} =$$
$$0{,}0001\pi\left(\frac{1}{15}1{,}3^{15} + \frac{1}{4}1{,}3^8 + 1{,}3 - 0\right) \approx 0{,}002121 \approx 2{,}1\cdot 10^{-3}$$

Volumet av luren er $\underline{\underline{2{,}1}}$ liter.

Oppgåve 3

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}, \quad x \neq 1$$

a) $x \to 1 \Rightarrow x - 1 \to 0 \wedge x^2 + 1 \to 2 \neq 0$.
$x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$, $x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$.
$\underline{\underline{x{=}1}}$ er vertikal asymptote for f.
Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{rrl}
(x^2+ & 1) & : (x-1) = x + 1 + \frac{2}{x-1} \\
-(x^2- \quad x) & & \\
x+ & 1 & \\
-(x- & 1) & \\
 & 2 &
\end{array}$$

Altså: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$.
$x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{2}{x-1} \to 0 \Rightarrow f(x) - (x+1) \to 0$.
$\underline{\underline{y = x + 1}}$ er skrå asymptote for f.

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)' \cdot (x-1) - (x^2+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \\ & \frac{2x(x-1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

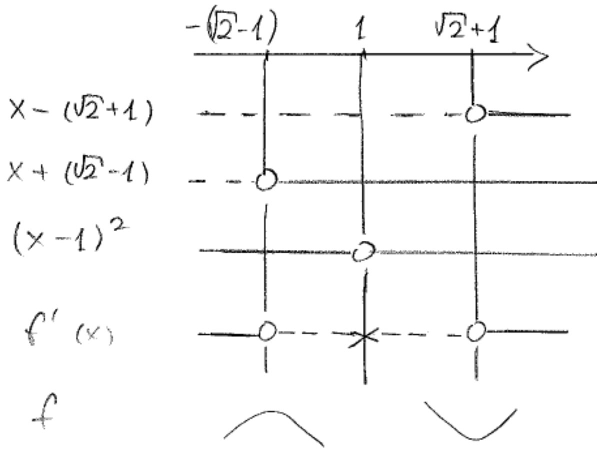
Faktoriserar nemnaren:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Altså:

$$f'(x) = \frac{(x - (\sqrt{2}+1))(x + (\sqrt{2}-1))}{(x-1)^2}$$

Forteiknskjema:



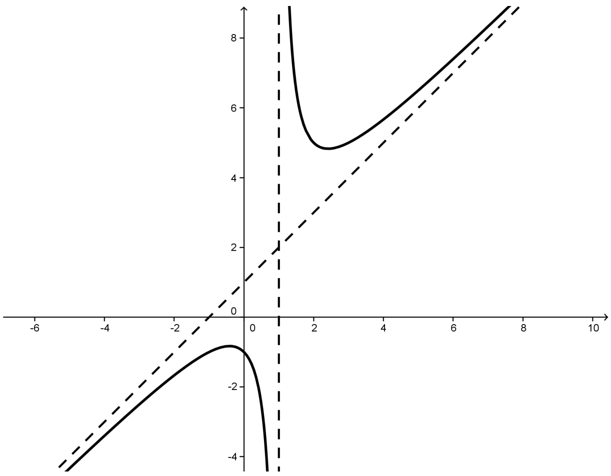
Av forteiknskjemaet ser vi at f har eit toppunkt for $x = -(\sqrt{2}-1)$ og eit botnpunkt for $x = \sqrt{2}+1$.
$f(-(\sqrt{2}-1)) = \frac{(-(\sqrt{2}-1)^2+1)}{-(\sqrt{2}-1)-1} = -\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2(\sqrt{2}-1) \approx -0{,}83$

$f(\sqrt{2}+1) = \frac{(\sqrt{2}+1)^2+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}+1) \approx 4{,}83$
Toppunkt: $\underline{\underline{(-(\sqrt{2}-1), -2(\sqrt{2}-1))}}$, botnpunkt: $\underline{\underline{(\sqrt{2}+1, 2(\sqrt{2}+1))}}$.

c)

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-1)\cdot 2(x-2)\cdot 1}{(x-1)^4} =$$
$$\frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-1)}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$f''(x)$ endrar forteikn når $x = 1$. Men funksjonen er ikkje definert her. Difor har ikkje f nokon vendepunkt. Når $x < 1$ er $f''(x)$ negativ, og når $x > 1$ er $f''(x)$ positiv. Difor $\underline{\underline{\text{er } f \text{ konkav ned når } x < 1 \text{ og konkav opp når } x > 1}}$.



d)

Oppgåve 4

$$H(t) = -1{,}4\cos\left(0{,}503(t-7,0)\right), \quad t \in [0, 24\rangle$$

a) Amplituden er absoluttverdien til talet som cosinus-leddet er multiplisert med. Amplituden er difor $\underline{\underline{1{,}4}}$. Når t aukar med perioden p, skal argumentet til cosinusfunksjonen auke med 2π,

$$\begin{aligned} 0{,}503(t+p-7,0) - 0{,}503(t-7,0) &= 2\pi \\ 0{,}503p &= 2\pi \\ p &= \frac{2\pi}{0{,}503} \approx \underline{\underline{12{,}5}} \end{aligned}$$

b) Høgda er maksimal når $\cos(0{,}503(t-7,0))$ er minst – altså når

$$\begin{aligned}\cos\left(0{,}503(t-7,0)\right) &= -1\\ 0{,}503(t-7,0) &= \pi + n\cdot 2\pi, \quad n\in\mathbb{Z}\\ t-7{,}0 &= \frac{(2n+1)\pi}{0{,}503}\\ t &= \frac{(2n+1)\pi}{0{,}503}+7{,}0\end{aligned}$$

$n=-1$: $t=\frac{-\pi}{0{,}503}+7{,}0\approx 0{,}754\approx\frac{45}{60}$
$n=0$: $t=\frac{\pi}{0{,}503}+7{,}0\approx 13{,}246\approx 13+\frac{15}{60}$
Havhøgda var størst klokka $\underline{\underline{00{:}45}}$ og klokka $\underline{\underline{13{:}15}}$.

Vi finn når havhøgda var 1 m over gjennomsnittet ved å løyse likninga

$$\begin{aligned}H(t) &= 1\\ -1{,}4\cos\left(0{,}503(t-7,0)\right) &= 1\\ \cos\left(0{,}503(t-7,0)\right) &= -\frac{1}{1{,}4}=-\frac{5}{7}\end{aligned}$$

$$0{,}503(t-7,0)=\cos^{-1}\left(-\frac{5}{7}\right)+n\cdot 2\pi \;\vee\; 0{,}503(t-7,0)=-\cos^{-1}\left(-\frac{5}{7}\right)+n\cdot 2\pi$$

$$t=\frac{\cos^{-1}\left(-\frac{5}{7}\right)+n\cdot 2\pi}{0{,}503}+7{,}0 \;\vee\; t=\frac{-\cos^{-1}\left(-\frac{5}{7}\right)+n\cdot 2\pi}{0{,}503}+7{,}0$$

$$t\approx 11{,}70+n\cdot 12{,}49 \;\vee\; t\approx 2{,}30+n\cdot 12{,}49$$

der $n\in\mathbb{Z}$.
$n=0$: $t\approx 11{,}70=11+\frac{42}{60}\vee t\approx 2{,}30=2+\frac{18}{60}$
$n=1$: $t\approx 11{,}70+12,49=24{,}19>24\vee t\approx 2{,}30+12{,}49\approx 14+\frac{47}{60}$
Havhøgda var 1 m over snittet klokka $\underline{\underline{02{:}18}}$, klokka $\underline{\underline{11{:}42}}$ og klokka $\underline{\underline{14{:}47}}$.

c)

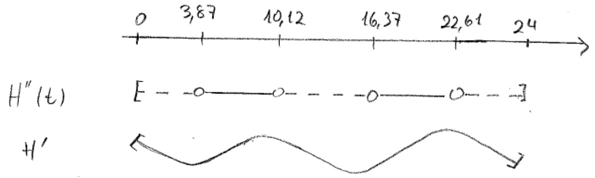
$$\begin{aligned}H'(t) &= -1{,}4\cdot\left(-\sin\left(0{,}503(t-7,0)\right)\right)\cdot 0{,}503 = ???0{,}7042\sin\left(0{,}503(t-7,0)\right)\\ H''(t) &= 0{,}7042\cos\left(0{,}503(t-7,0)\right)\cdot 0{,}503=0{,}354\cos\left(0{,}503(t-7,0)\right)\end{aligned}$$

Havet stig raskast når H'' endrar forteikn frå positivt til negativt.

$$\begin{aligned}H''(t) &= 0\\ 0{,}354\cos\left(0{,}503(t-7,0)\right) &= 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0{,}503(t-7,0) &= \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \\
t &= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{0{,}503} + 7,0 \\
t &\approx 10{,}12 + n\cdot 6{,}25
\end{aligned}
$$

$t \in [0, 24\rangle$: $t = 3{,}87 \vee t = 10{,}12 \vee t = 16{,}37 \vee t = 22{,}61$ Forteiknskjema:



Havet steig raskast når H' er størst. Av forteiknskjemaet ser vi at det er når $t \approx 10{,}12 \approx 10 + 7/60$ og når $t \approx 22{,}61 \approx 22 + 37/60$ (havet stig like rakst ved desse to tidspunkta). Svaret vert klokka $\underline{\underline{10{:}07}}$ og $\underline{\underline{22{:}37}}$.

Oppgåve 5

$$
\vec{u} = [2, -3, 6], \quad \vec{v} = [3, 1, 0]
$$

a)

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \underline{\underline{7}} \\
|\vec{v}| &= \sqrt{3^2 + 1} = \underline{\underline{\sqrt{10}}}
\end{aligned}
$$

u er vinkelen mellom vektorane.

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos u \\
\cos u &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{2\cdot 3 + (-3)\cdot 1 + 6\cdot 0}{7\cdot\sqrt{10}} = \frac{3}{7\sqrt{10}} \\
u &= \cos^{-1}\frac{3}{7\sqrt{10}} \approx \underline{\underline{1{,}43}} \approx 82{,}2^\circ
\end{aligned}
$$

b) Tre krav: 1) $\vec{w} \perp \vec{u}$, 2) $\vec{w} \perp \vec{v}$ og 3) $|\vec{w}| = 3$.
Vi veit at $\vec{u} \times \vec{v}$ står normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Difor må $\vec{w}$ vere

parallell med $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [-3 \cdot 0 - 6 \cdot 1, 6 \cdot 3 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3] = [-6, 18, 11]$$

Sidan $\vec{w}$ er parallell med denne vektoren, må vi ha at $\vec{w} = k[-6, 18, 11]$. Sidan vi skal ha at $|\vec{w}| = 3$, får vi

$$\begin{aligned} |k|\sqrt{(-6)^2 + 18^2 + 11^2} &= 3 \\ k &= \pm\frac{3}{\sqrt{481}} \end{aligned}$$

Det gir at $\underline{\underline{\vec{w} = \pm\frac{3}{\sqrt{481}}[-6, 18, 11]}}$.

c) Parameterframstilling for linja l:

$$[x, y, z] = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{u} = [0, 0, 6] + t[2, -3, 6] = [2t, -3t, 6 + 6t]$$

Vi set dette inn i likninga for α og bestemmer t:

$$\begin{aligned} 4x + 5y - 6z - 7 &= 0 \\ 4 \cdot 2t + 5 \cdot (-3t) - 6 \cdot (6 + 6t) - 7 &= 0 \\ -43t - 43 &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Vi set dette inn i parameterframstillinga over:

$$[x, y, z] = [2 \cdot (-1), -3 \cdot (-1), 6 + 6 \cdot (-1)] = [-2, 3, 0]$$

Skjeringspunktet er $\underline{\underline{(-2, 3, 0)}}$.

d) Vektoren $\vec{d}$ går frå eit punkt (x_l, y_l, z_l) på linja l til eit punkt (x_m, y_m, z_m) på linja m:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= [x_m - x_l, y_m - y_l, z_m - z_l] = [1 + 3s - 2t, 3 + s + 3t, 4 - (6 + 6t)] = \\ &\quad [1 + 3s - 2t, 3 + s + 3t, -2 - 6t] \end{aligned}$$

Avstanden mellom l og m er lengda av $\vec{d}$ når $\vec{d}$ står normalt på både l og m. l har retningsvektor $\vec{u}$ og m har retningsvektor $[3, 1, 0] = \vec{v}$.

Vi må altså kreve at $\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ (I) og $\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ (II).
I):

$$\begin{aligned} [1+3s-2t, 3+s+3t, -2-6t] \cdot [2,-3,6] &= 0 \\ 2(1+3s-2t) - 3(3+s+3t) + 6(-2-6t) &= \\ 3s - 49t &= 19 \end{aligned}$$

II):

$$\begin{aligned} [1+3s-2t, 3+s+3t, -2-6t] \cdot [3,1,0] &= 0 \\ 3(1+3s-2t) + 3 + s + 3t &= 0 \\ 10s - 3t &= -6 \\ t &= 2 + \frac{10}{3}s \end{aligned}$$

II) i I):

$$\begin{aligned} 3s - 49\left(2 + \frac{10}{3}s\right) &= 19 \\ -\frac{481}{3}s &= 19 + 98 = 117 \\ s &= -\frac{3 \cdot 117}{481} = -\frac{27}{37} \end{aligned}$$

II) gir då at

$$t = 2 + \frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{27}{37}\right) = -\frac{16}{37}$$

Dermed får vi bestemt $\overrightarrow{d}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d} &= \left[1 + 3 \cdot \left(-\frac{27}{37}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{16}{37}\right), 3 + \left(-\frac{27}{37}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{16}{37}\right), \right. \\ & \left. -2 - 6 \cdot \left(-\frac{16}{37}\right)\right] = -\frac{2}{37}[-6, 18, 11] \end{aligned}$$

Avstanden mellom l og m blir då lengda av denne vektoren:

$$|\overrightarrow{d}| = \frac{2}{37}\sqrt{(-6)^2 + 18^2 + 11^2} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{481}}{37}}} \approx 1{,}19$$