Eksamen i	FO929A Matematikk
	Ordinær Eksamen
Dato	25. mai 2007
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	4
Vedlegg	Enhetssirkelen
Tillatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator
	Godkjent formelsamling

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ gir $f'(x) = \frac{1\cdot(x-3)-(x+2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \boxed{\dfrac{-5}{(x-3)^2}}$ ved brøkregelen.

b) $f(x) = \ln(x^2+x-7)$ gir $f'(x) = \frac{1}{u}\cdot u' = \boxed{\dfrac{2x+1}{x^2+x-7}}$ ved kjerneregelen med $u = x^2+x-7$ og $u' = 2x+1$.

c) $f(x) = 3.14159265\ldots$ gir $f'(x) = \boxed{0}$ siden $3.14159265\ldots$ er en konstant.

d) $f(x) = \sqrt{x^2-4x}$ gir $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = \boxed{\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}}$ ved kjerneregelen med $u = x^2-4x$ og $u' = 2x-4$.

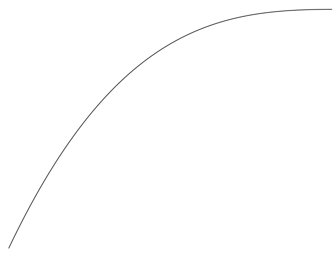
e) $f(x) = (x-1)^2\cdot\sqrt{x^2-4x}$ gir $f'(x) = u'v+uv'$ ved produktregelen, der $u = (x-1)^2$ og $v = \sqrt{x^2-4x}$. Vi har at $u' = 2(x-1)\cdot 1 = 2x-2$ ved kjerneregelen, og v' regnet vi ut i forrige deloppgave. Dermed får vi at $f'(x) = (2x-2)\sqrt{x^2-4x} + (x-1)^2\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} = \boxed{\dfrac{(x-1)(3x^2-11x+2)}{\sqrt{x^2-4x}}}$ etter at vi har forenklet brøken.

f) Opplysningene $B'(x) > 0$ og $B''(x) < 0$ betyr at prisen stiger, men at prisstigningen avtar. Se figur 1.

Oppgave 2

a) Sum- og potensregel gir $\int(24x^{11}-6x^2-7)\,\mathrm{d}x = \boxed{2x^{12}-2x^3-7x+\mathcal{C}}$.

b) Sumregel gir $\int(5\cos x - 8\sin x)\,\mathrm{d}x = \boxed{5\sin x + 8\cos x + \mathcal{C}}$.



Figur 1: Grov skisse av grafen til $y = B(x)$

c) Delvis integrasjon med $u' = x^5,\ v = \ln x \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{6}x^6,\ v' = \frac{1}{x}$ gir

$$\int x^5 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6}\int x^6 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{36}x^6 + \mathcal{C}}.$$

d) Substitusjon med $u = x^2$ gir $u' = 2x$ og

$$\int 4x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = 2\int \sin u \,\mathrm{d}u = -2\cos u + C = \boxed{-2\cos(x^2) + \mathcal{C}}$$

.

e) Vi faktoriserer $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ og får dermed

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}.$$

Dette gir ligningsystemet

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A - B &= 2 \end{aligned}$$

som har løsning $A = 1$ og $B = -1$. Vi setter dette inn i integralet og får

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + \mathcal{C} = \boxed{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathcal{C}}. \end{aligned}$$

f) Polynomdivisjon gir $\frac{x^3-x+2}{x^2-1} = x + \frac{2}{x^2-1}$. Ved å bruke integralet fra punkt (e) får vi

$$\int \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathcal{C}}.$$

g) Vi skriver $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ og separerer ligningen før vi integrerer på begge sider:

$$\begin{aligned} (x^2-1)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathcal{C} \end{aligned}$$

Det siste integralet har vi gjort i punkt (e). Vi løser likningen med hensyn på y og får

$$y = \boxed{\mathcal{K} \cdot \frac{x-1}{x+1}}$$

der konstanten $\mathcal{K} = e^{\mathcal{C}}$.

Oppgave 3

Vi ser på funksjonen $f(x) = 4\sin^2 x - 1$ for $0 \leq x < 2\pi$.

a) Skjæringspunktene med x-aksen finnes ved å løse ligningen $f(x) = 0$, som gir $\sin x = \pm\frac{1}{2}$. Siden $\sin^{-1}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm\pi/6$ og $x \in [0,\, 2\pi\rangle$, er de fire løsningene gitt ved

$$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_3 = \frac{7\pi}{6}, \quad x_4 = \frac{11\pi}{6}}.$$

b) Vi bruker produktregelen med $u = \sin x$ og $v = \sin x$, eller kjerneregel med $u = \sin x$ og $u' = \cos x$. Dette gir

$$f'(x) = \boxed{8 \sin x \cdot \cos x}.$$

c) Vi bruker at

$$\begin{aligned} \sin x \geq 0 \quad & \text{for } x \in [0,\, \pi] \\ \cos x \geq 0 \quad & \text{for } x \in [0,\, \pi/2] \text{ og } x \in [3\pi/2,\, 2\pi\rangle \end{aligned}$$

Det gir at $f'(x) \geq 0$ for $\boxed{x \in [0,\, \pi/2] \text{ og } x \in [\pi,\, 3\pi/2]}$.

d) Vi bruker fortegnskjemaet til $f'(x)$ fra punktet ovenfor til å finne topp- og bunnpunkter for $f(x)$:

$$\text{Bunnpunkter:} \quad (0, -1), \quad (\pi, -1)$$

$$\text{Toppunkter:} \quad \left(\frac{\pi}{2},\, 3\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2},\, 3\right)$$

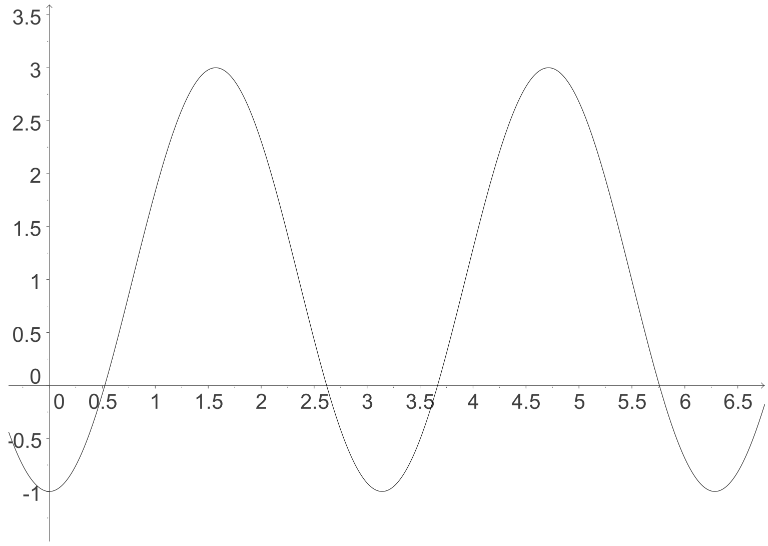
Vi bruker at $f(0) = f(\pi) = -1$ og $f(\pi/2) = f(3\pi/2) = 3$. Legg merke til $x = 2\pi$ ikke er en ekstremalverdi fordi den ikke er med i definisjonsmengden. Se figur 2.

e) Siden området R ligger under x-aksen, er arealet gitt ved

$$A = -\int_0^{\pi/6} (4\sin^2 x - 1)\, \mathrm{d}x$$

Vi ser at vi trenger integralet $\int \sin^2 x\, \mathrm{d}x$, og regner det ut ved å bruke delvis integrasjon to ganger. Vi får:

$$\int \sin^2 x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$$



Figur 2: Skisse av grafen til $y = f(x)$

Vi setter dette inn og regner ut arealet:

$$A = -\int_0^{\pi/6} (4\sin^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi)}.$$

f) Vi bruker formelen for volum av et omdreiningslegemer og får

$$V = \pi \int_0^{\pi/6} \left(4\sin^2 x - 1\right)^2 \mathrm{d}x = \boxed{\frac{\pi}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})}$$

når vi setter inn det oppgitte uttrykket for det ubestemte integralet.

Oppgave 4

a) Cosinussetningen gir $BD^2 = 4^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \cos(75°) \cong 29.86$, og dermed er $BD \cong \boxed{5.5}$. Sinussetningen gir $\sin B \cong 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sin 75°}{5.46} \cong 0.87$, og dermed $\angle B \cong \boxed{60°}$. Til slutt er $\angle D \cong 180° - 75° - 60° \cong \boxed{45°}$. Se figur 3.

b) Vi setter inn den eksakte verdien for $\cos 75°$ is cosinussetningen. Dette gir

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &= 40 - 4\sqrt{6}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 40 - 24 + 4\sqrt{12} = 16 + 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

Siden $(2 + 2\sqrt{3})^2 = 4 + 8\sqrt{3} + 12 = 16 + 8\sqrt{3}$, ser vi at $BD = \boxed{2 + 2\sqrt{3}}$.

c) Vi setter inn de eksakte verdiene for $\sin 75^\circ$ og BD i sinussetningen, og får

$$\sin B = \frac{2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{4}\sqrt{12} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

Dette betyr at $\angle B = \boxed{60^\circ}$ og at $\angle D = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = \boxed{45^\circ}$.

d) Siden trekanten $\triangle CBD$ er speilingen av trekanten $\triangle ABC$, har trekantene samme areal. Dermed blir arealet av firkanten $ABCD$ gitt ved

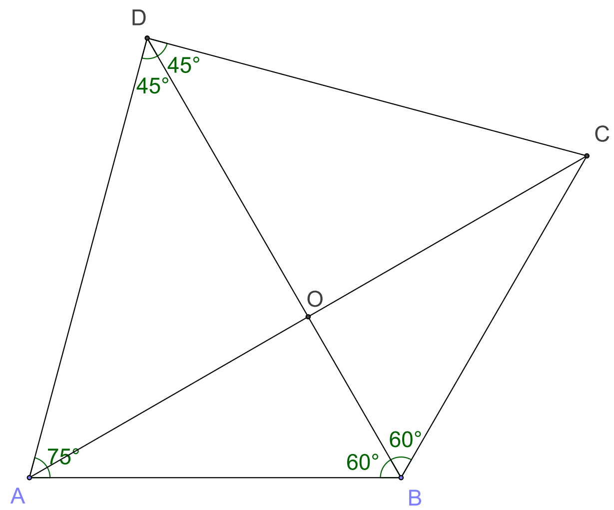
$$A = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = \boxed{4(3+\sqrt{3})}$$

e) Trekanten $\triangle BDE$ er rotasjonen av trekanten $\triangle BDA$ om grunnlinjen BD med 90°. Dette er fordi grunnlinjen BD er den samme i begge trekantene, toppvinklen $\angle BED = 75^\circ = \angle BAD$, og $\angle BOE = \angle BOA = 90^\circ$ siden E ligger rett over O. Dermed er høyden h i pyramiden gitt ved

$$h = OE = OA = AB\cdot\sin 60^\circ = 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

og volumet av pyramiden $ABCDE$ blir

$$V = \frac{1}{3}\cdot 4(3+\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3} = \boxed{8(\sqrt{3}+1)}$$



Figur 3: Firkanten $ABCD$