Eksamen i	FO929A Matematikk
	Kontinuasjonseksamen
Dato	August 2007
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	4
Vedlegg	Enhetssirkelen
Tillatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator
	Godkjent formelsamling

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $f(x) = \frac{x+7}{x-4}$ gir $f'(x) = \frac{1\cdot(x-4)-(x+7)\cdot 1}{(x-4)^2} = \boxed{\dfrac{-11}{(x-4)^2}}$ ved brøkregelen.

b) $f(x) = \ln(x^3 - 5x + 4)$ gir $f'(x) = \frac{1}{u}\cdot u' = \boxed{\dfrac{3x^2-5}{x^3-5x+4}}$ ved kjerneregelen med $u = x^3 - 5x + 4$ og $u' = 3x^2 - 5$.

c) $f(x) = x^2 - 5.545453\ldots$ gir $f'(x) = \boxed{2x}$.

d) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ gir $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}$ ved kjerneregelen med $u = x^2 + 3$ og $u' = 2x$.

e) $f(x) = (x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+3}$ gir $f'(x) = u'v + uv'$ ved produktregelen, der $u = (x+1)^2$ og $v = \sqrt{x^2+3}$. Vi har at $u' = 2(x+1)\cdot 1 = 2x+2$ ved kjerneregelen, og v' regnet vi ut i forrige deloppgave. Dermed får vi at

$$f'(x) = (2x+2)\sqrt{x^2+3} + (x+1)^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \boxed{\frac{(x+1)(3x^2+x+6)}{\sqrt{x^2+3}}}$$

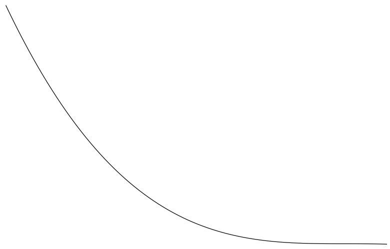
etter at vi har forenklet brøken.

f) Opplysningene $A'(x) < 0$ og $A''(x) > 0$ betyr at prisen synker, men at nedgangen i prisen avtar. Se figur 1.

Oppgave 2

a) Sum- og potensregel gir $\int (12x^5 + 8x^3 + 4)\,dx = \boxed{2x^6 + 2x^4 + 4x + \mathcal{C}}$.

b) Sumregel gir $\int (\cos x + 4\sin x)\,dx = \boxed{\sin x - 4\cos x + \mathcal{C}}$.



Figur 1: Grov skisse av grafen til $y = A(x)$

c) Delvis integrasjon med $u' = x^8,\ v = \ln x \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{9}x^9,\ v' = \frac{1}{x}$ gir

$$\int x^8 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{9}x^9 \ln x - \frac{1}{9}\int x^9 \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{9}x^9 \ln x - \frac{1}{81}x^9 + \mathcal{C}}.$$

d) Substitusjon med $u = x^3$ gir $u' = 3x^2$ og

$$\int 6x^2 \cdot \cos(x^3) \, \mathrm{d}x = 2\int \cos u \, \mathrm{d}u = 2\sin u + C = \boxed{2\sin(x^3) + \mathcal{C}}$$

.

e) Vi faktoriserer $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ og får dermed

$$\frac{4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x + (3A - B)}{(x-1)(x+3)}.$$

Dette gir ligningsystemet

$$A + B = 0$$
$$3A - B = 4$$

som har løsning $A = 1$ og $B = -1$. Vi setter dette inn i integralet og får

$$\int \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1} \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+3} \, \mathrm{d}x$$
$$= \ln|x-1| - \ln|x+3| + \mathcal{C} = \boxed{\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \mathcal{C}}.$$

f) Polynomdivisjon gir $\frac{x^3+3x^2-x+1}{x^2+2x-3} = x + 1 + \frac{4}{x^2+2x-3}$. Ved å bruke integralet fra punkt (e) får vi

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3} \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2}x^2 + x + \ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \mathcal{C}}.$$

g) Vi skriver $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ og separerer ligningen før vi integrerer på begge sider:

$$(x^2 + 2x - 3) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \, \mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$
$$\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \int \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \, \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \mathcal{C}$$

Det siste integralet har vi gjort i punkt (e). Vi løser likningen med hensyn på y og får

$$y = \boxed{\mathcal{K} \cdot \frac{x-1}{x+3}}$$

der konstanten $\mathcal{K} = e^{\mathcal{C}}$.

Oppgave 3

Vi ser på funksjonen $f(x) = \tan^2 x - 3, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$.

a) Nullpunktene finnes ved å løse ligningen $f(x) = 0$, som gir $\tan x = \pm\sqrt{3}$. Siden $\tan^{-1}\big(\pm\sqrt{3}\big) = \pm\pi/3$ og $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, er de to nullpunktene gitt ved

$$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3}}$$

.

b) Vi bruker kjerneregel med $u = \tan x$ og $u' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Dette gir

$$f'(x) = 2u \cdot u' = 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}$$

.

c) Vi bruker at

$$\begin{aligned} \sin x \geq 0 \quad &\text{for } x \in [0,\ \pi/2) \\ \cos x \geq 0 \quad &\text{for } x \in (-\pi/2, \pi/2) \end{aligned}$$

Det gir at $f'(x) \geq 0$ for $\boxed{x \in [0,\ \pi/2)}$.

d) Vi bruker fortegnskjemaet til $f'(x)$ fra punktet ovenfor til å finne topp- og bunnpunkter for $f(x)$:

$$\text{Bunnpunkter:} \quad (0, -3)$$

Vi bruker at $f(0) = -3$. Se figur 2.

e) Siden $(\tan x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$, ser vi at $\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x - x + \mathcal{C}$.

f) Siden området R ligger under x-aksen og symmetrisk om $x = 0$, er arealet gitt ved

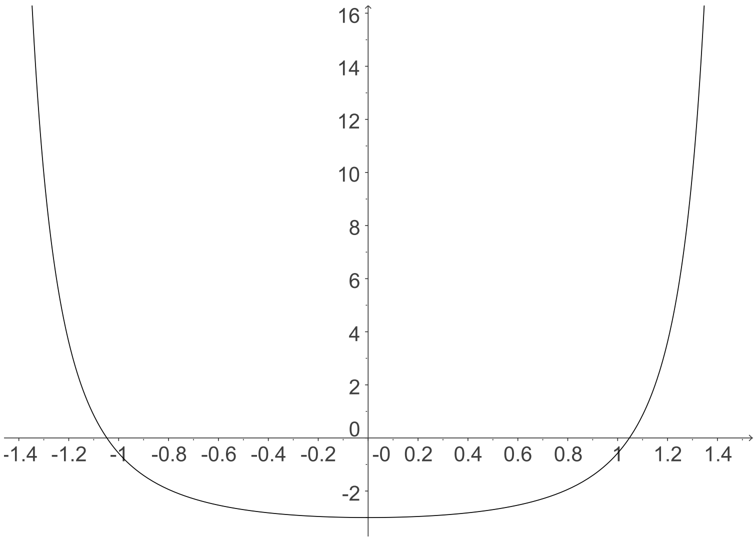
$$A = -2 \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x - 3)\, \mathrm{d}x$$

Vi bruker integralet fra forrige deloppgave, og ser at

$$\int (\tan^2 x - 3)\, \mathrm{d}x = \tan x - 4x + \mathcal{C}$$

Vi setter dette inn og regner ut arealet:

$$A = -2 \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x - 3)\, \mathrm{d}x = \boxed{2\pi - 2}.$$



Figur 2: Skisse av grafen til $y = f(x)$

Oppgave 4

a) Cosinussetningen gir

$$BD^2 = (2+2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{6}\cdot\cos(45^\circ) \cong 16$$

og dermed er $BD \cong \boxed{4.0}$. Sinussetningen gir $\sin D \cong 2\sqrt{6}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{4.00} \cong 0.87$, og dermed $\angle D \cong \boxed{60^\circ}$. Til slutt er $\angle B \cong 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ \cong \boxed{75^\circ}$. Se figur 3.

b) Vi setter inn den eksakte verdien $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ is cosinussetningen. Dette gir

$$\begin{aligned} BD^2 &= (2+2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 40 + 8\sqrt{3} - 8\sqrt{3}(1+\sqrt{3}) = 40 - 24 = 16 \end{aligned}$$

og dermed er $BD = \boxed{4}$.

c) Vi setter inn den eksakte verdien $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i sinussetningen, og får

$$\sin D = 2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

Dette betyr at $\angle D = \boxed{60^\circ}$ og at $\angle B = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = \boxed{75^\circ}$.

d) Siden trekanten $\triangle CBD$ er speilingen av trekanten $\triangle ABC$, har trekantene samme areal. Dermed blir arealet av firkanten $ABCD$ gitt ved

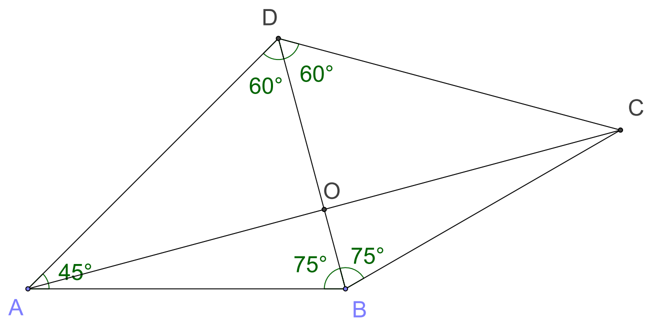
$$A = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = \boxed{4(3+\sqrt{3})}$$

e) Trekanten $\triangle BDE$ er rotasjonen av trekanten $\triangle BDA$ om grunnlinjen BD med $90°$. Dette er fordi grunnlinjen BD er den samme i begge trekantene, toppvinklen $\angle BED = 45° = \angle BAD$, og $\angle BOE = \angle BOA = 90°$ siden E ligger rett over O. Dermed er høyden h i pyramiden gitt ved

$$h = OE = OA = AD \cdot \sin 60° = (2 + 2\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \boxed{3 + \sqrt{3}}$$

og volumet av pyramiden $ABCDE$ blir

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4(3 + \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3}) = \boxed{8(\sqrt{3} + 2)}$$



Figur 3: Firkanten $ABCD$