Eksamen i	FO929A Matematikk
	Underveiseksamen
Dato	18. desember 2007
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	4
Vedlegg	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Likningen $x^2 + x - 1 = 0$ gir $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ ved abc-formelen.

b) Vi løser første likning $3x + 7y = 32$ for x, og finner $x = 1/3(32 - 7y)$. Ved innsetting i andre likning $4x+11y = 46$, finner vi at $4/3(32-7y)+11y = 46$, eller $4(32 - 7y) + 33y = 138$. Dette gir $5y = 10$ eller $y = 2$, og dermed $x = 6$. Likningssystemet har derfor løsning $(x, y) = (6, 2)$.

c) Likningen $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ er kvadratisk i $u = x^3$, og abc-formelen gir $u = x^3 = (-7 \pm \sqrt{49 + 32})/2$, dvs $x^3 = -8$ eller $x^3 = 1$. Dermed har likningen løsningene $x = -2$ og $x = 1$.

d) Likningen $\sqrt{4 + x} = 5 - \sqrt{x - 1}$ gir $4 + x = 25 - 10\sqrt{x - 1} + (x - 1)$ ved kvadrering, eller $-20 = -10\sqrt{x - 1}$. Dermed er $\sqrt{x - 1} = 2$, som gir $x - 1 = 4$, dvs. $x = 5$. Vi setter prøve på svaret, og ser at $VS = HS = 3$ når vi setter inn $x = 5$. Dermed er $x = 5$ løsning av likningen.

e) Ulikheten $x^2 - 3x + 3 < 1$ kan skrives som $x^2 - 3x + 2 < 0$. Vi faktoriserer VS, får $(x-1)(x-2) < 0$, og setter opp en fortegnslinje for VS av ulikheten. Vi ser at $1 < x < 2$ er løsning av ulikheten.

f) Likningen $x^3 - 2x + 1 = 0$ kan kun ha heltallig løsning for $x = \pm 1$. Vi setter inn $x = \pm 1$, og ser at $x = 1$ gir løsning av likningen. Polynomdivisjon gir $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$, dermed er $x^3 - 2x + 1 = 0$ hvis og bare hvis $x - 1 = 0$ eller $x^2 + x - 1 = 0$, dvs for $x = 1$ og for $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$.

Oppgave 2

a) Vi finner at

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [2 - (-2), 2 - (-1), 1 - 1] = [4, 3, 0], & |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{25} = 5 \\
\overrightarrow{AC} &= [2 - (-2), 2 - (-1), 3 - 1] = [4, 3, 2], & |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{29} \approx 5,39 \\
\overrightarrow{BC} &= [2 - 2, 2 - 2, 3 - 1] = [0, 0, 2], & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{4} = 2
\end{aligned}$$

b) Vi har at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= [4,3,0] \times [4,3,2] \\ &= \left[\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right] \\ &= [6-0, -(8-0), 12-12] \\ &= [6, -8, 0]\end{aligned}$$

Lengden av denne vektoren er $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2+8^2+0^2} = \sqrt{100} = 10$. Arealet av $\triangle ABC$ er dermed $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.

c) Vi har at arealet av $\triangle ABC$ er gitt ved $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \sin(\angle ABC)$. Dette gir $\sin(\angle ABC) = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 1$, og dermed er $\angle ABC = \arcsin 1 = 90°$.

d) Siden $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, finner vi at

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = [-2,-1,1] + [0,0,2] = [-2,-1,3]$$

Koordinatene til punktet D er dermed $D = (-2,-1,3)$.

e) Vi finner først $\overrightarrow{BD} = [-2-2, -1-2, 3-1] = [-4,-3,2]$, og regner så ut

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = [-4,-3,2] \cdot [4,3,2] = -16 - 9 + 4 = -21 \neq 0$$

Siden prikkproduktet ikke er null, står $\overrightarrow{BD}$ ikke vinkelrett på $\overrightarrow{AC}$.

f) Volumet av pyramiden er gitt ved

$$V = \frac{1}{3}\,|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AT}|$$

Vi finner først $\overrightarrow{AT} = [5-(-2), [5-(-1), [5-1] = [7,6,4]$, og regner så ut

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} &= [4,3,0] \times [0,0,2] \\ &= \left[\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right] \\ &= [6-0, -(8-0), 0-0] \\ &= [6, -8, 0]\end{aligned}$$

Dermed finner vi $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AT} = [6,-8,0] \cdot [7,6,4] = 42 - 48 + 0 = -6$, som gir $V = \frac{1}{3}\,|-6| = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$.

Oppgave 3

a) Arealet av $\triangle ABC$ er gitt ved

$$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10,39$$

b) Cosinus-setningen gir

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 28$$

og dermed $BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx 5,29$. Sinussetningen gir

$$\sin B = \sin A \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{2\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

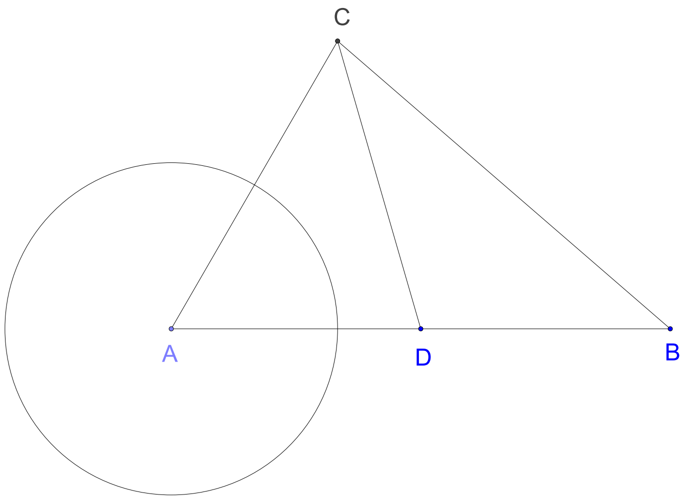
og dermed $\angle B = \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 40,9°$. Vi bruker at summen av vinklene i en trekant er $180°$ og finner

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B \approx 180° - 60° - 40,9° = 79,1°$$

c) Vi kaller avstanden fra punkt C ned til linjestykket AB for h. Da er arealet av trekanten $\triangle ADC$ gitt som $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot h$, mens arealet av $\triangle BDC$ er gitt som $\frac{1}{2} \cdot DB \cdot h$. For at disse arealene skal være like må vi altså ha $AD = DB$, og dermed $AD = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

d) Arealet av sirkelsektoren er $\pi r^2 \cdot \frac{60°}{360°} = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi \cdot 2^2}{6} = \frac{2\pi}{3} \approx 2,09$.

e) Vi bruker at en sentralvinkel er dobbelt så stor som en periferivinkel som spenner over samme sirkelbue, og får $\angle PRQ = \frac{1}{2}\angle PAQ = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.



Figur 1: Figur til oppgave 3

Oppgave 4

a) Telleren er et polynom og gir ingen begrensninger på definisjonsmengden, men nevneren må være ulik null.

$$2x^2 - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 1$$

Størst mulig definisjonsmengde er $D_f = \{x \neq \pm 1\}$.

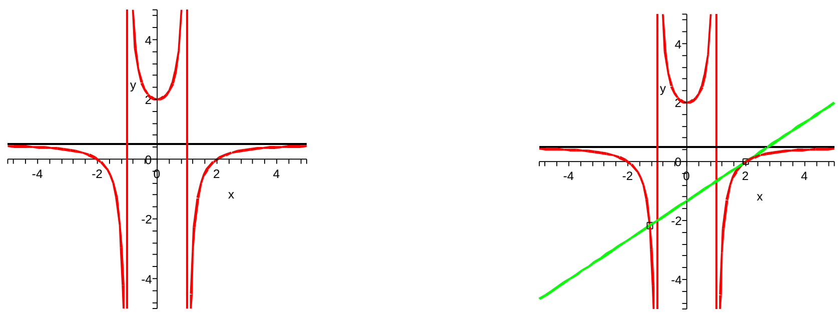
b) Siden $f(0) = 2$, så er skjæringspunktet med y-aksen gitt ved $(0, 2)$. Vi finner skjæringspunktene med x-aksen ved å løse ligningen $f(x) = 0$. For en brøkfunksjon holder det å finne ut når telleren er lik null, dvs $x^2 - 4 = 0$ som gir $x = \pm 2$. Begge disse punktene er med i definisjonsmengden, så skjæringspunktene med x-aksen er $(-2, 0)$ og $(2, 0)$.

c) Vi regner ut grenseverdien:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{2 - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

Det betyr at $y = 1/2$ er horisontal asymptote for f. En brøkfunksjon med horisontal asymptote har ikke skrå asymptote. Alternativt kunne vi sett at både teller og nevner har grad 2 og dermed har f ingen skrå asymptote.

d) Mulige vertikale asymptoter er i $x = \pm 1$, og siden disse i følge punkt b) ikke er nullpunkter for f, har vi vertikale asymptoter i $x = 1$ og $x = -1$.



Figur 2: Grafen til funksjonen f med asymptoter og linjen l

e) Vi bruker ettpunktsformelen og finner likningen til linjen l:

$$y - y_0 = a(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

f) Det korrekte svaret er at $Q = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{13}{6}\right) \approx (-1.25,\ -2.17)$.