Eksamen i	FO929A Matematikk
	Ordinær Eksamen
Dato	28. mai 2008
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	4
Vedlegg	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

Deriver følgende funksjoner.

a) $f(x) = 5x^2 + 3\sin x + e^x - e$ gir $f'(x) = \underline{\underline{10x + 3\cos x + e^x}}$.

b) $f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$ gir

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - (2x+1)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2) - (4x+2)}{(x+1)^3} = \underline{\underline{\frac{-2x}{(x+1)^3}}}$$

ved brøkregelen.

c) $f(x) = \cos(x^3 - 3x + 1)$ gir

$$f'(x) = -\sin(x^3 - 3x + 1) \cdot (3x^2 - 3) = \underline{\underline{-3(x^2 - 1)\sin(x^3 - 3x + 1)}}$$

ved kjerneregelen.

d) $f(x) = (x-3)^2 \cdot e^x$ gir

$$f'(x) = 2(x-3) \cdot e^x + (x-3)^2 \cdot e^x = (x-3)e^x(2+x-3) = \underline{\underline{(x-1)(x-3)e^x}}$$

ved produktregelen.

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+4} = (x^2+4)^{1/3}$ gir

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+4)^{-2/3} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}}}$$

ved potensregelen.

f) Likningen $y^2 + y = 4x\cos x$ gir $2yy' + y' = 4\cos x + 4x(-\sin x)$ ved implisitt derivasjon, og dermed

$$y'(2y+1) = 4\cos x - 4x\sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{4\cos x - 4x\sin x}{2y+1}$$

Dette betyr at tangenten til C i punktet $(x, y) = (0, 0)$ har stigningstall gitt ved $a = 4/1 = 4$, og at tangenten har likning

$$y - 0 = 4(x - 0) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = 4x}}$$

.

Oppgave 2

a) Vi har $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$ og $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$. Siden $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = -4 + 1 + 3 = 0$, har vi at vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\underline{\underline{90^\circ}}$.

b) Sideflaten utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er et rektangel, siden det er et parallellogram og $\vec{u} \perp \vec{v}$. Dermed blir arealet av sideflaten

$$A = \sqrt{6} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{84} = \underline{\underline{2\sqrt{21}}}$$

c) Vi har at volumet av E er gitt ved $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$. Vi regner først ut $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \big(1 \cdot 3 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3, 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)\big) \\
&= (2, -8, 4)
\end{aligned}$$

Dermed har vi at

$$V = |(2, -8, 4) \cdot (1, -1, 6)| = |2 + 8 + 24| = \underline{\underline{34}}$$

d) Vi har at $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \underline{\underline{(2, -8, 4)}}$ fra forrige oppgave, og når $r = 1$ har vi $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} = \underline{\underline{(0, 2, 4)}}$. Trekanten T utspent av $\vec{n}$ og $\vec{p}$ har sidene $\vec{n}$, $\vec{p}$ og $\vec{n} - \vec{p} = (2, -10, 0)$, og lengdene til disse sidene er gitt ved

$$|\vec{n}| = \sqrt{84} = \underline{\underline{2\sqrt{21}}}, \quad |\vec{p}| = \sqrt{20} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}, \quad |\vec{n} - \vec{p}| = \sqrt{104} = \underline{\underline{2\sqrt{26}}}$$

e) Når r er vilkårlig, så er $\vec{p} = (2, 1, 1) + r(-2, 1, 3) = (2 - 2r, 1 + r, 1 + 3r)$, og vi har

$$\vec{n} \cdot \vec{p} = (2, -8, 4) \cdot (2 - 2r, 1 + r, 1 + 3r) = 2(2 - 2r) - 8(1 + r) + 4(1 + 3r) = 0$$

Dermed har vi at vinkelen mellom $\vec{n}$ og $\vec{p}$ er $\underline{\underline{90^\circ}}$ for alle verdier av r, og dermed er trekanten T rettvinklet. Alternativt kunne vi konkludere at vinkelen mellom $\vec{n}$ og $\vec{p}$ er 90° uten å regne, siden $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{p}$ står normalt på alle vektorer i planet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Oppgave 3

a) $\int (3x^2 + 5\cos x)\,\mathrm{d}x = 3(x^3/3) + 5(\sin x) + \mathcal{C} = \underline{\underline{x^3 + 5\sin x + \mathcal{C}}}$

b) $\int (14e^{2x} + \frac{1}{1-x})\,\mathrm{d}x = 14(e^{2x}/2) + \ln|1-x|/(-1) + \mathcal{C} = \underline{\underline{7e^{2x} - \ln|1-x| + \mathcal{C}}}$

c) Vi bruker substitusjonen $u = 3x^2 + 2x,\ \mathrm{d}u = (6x+2)\,\mathrm{d}x = 2(3x+1)\,\mathrm{d}x$, og får

$$\int_{1/3}^{1} \frac{3x+1}{3x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\big[\ln|u|\big]_1^5 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln 5}}$$

Alternativt kunne vi brukt delbrøkoppspaltning for å løse det bestemte integralet.

d) For å løse integralet, bruker vi at $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, som gir at $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$. Vi får

$$\int_0^{\pi/4} 2\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \big(1 - \cos(2x)\big)\,\mathrm{d}x = \big[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\big]_0^{\pi/4} = \underline{\underline{\frac{\pi - 2}{4}}}$$

Alternativt kunne vi ha løst dette integralet ved hjelp av gjentatt bruk av delvis integrasjon.

e) Vi separerer først differensiallikningen:

$$3y' = -y^2\cos x \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{y^2}\,\mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x$$

Integrasjon gir nå at $3/y = \sin x + \mathcal{C}$, og dermed den generelle løsningen

$$\underline{\underline{y = \frac{3}{\sin x + \mathcal{C}}}}$$

Vi kontrollerer at den generelle løsningen vi har funnet er en løsning av differensiallikningen. Vi får

$$y' = \frac{0 - 3(\cos x)}{(\sin x + \mathcal{C})^2} = \frac{-3\cos x}{(\sin x + \mathcal{C})^2}$$

og dermed at

$$3y' + y^2\cos x = \frac{-9\cos x}{(\sin x + \mathcal{C})^2} + \Big(\frac{3}{\sin x + \mathcal{C}}\Big)^2\cos x = 0$$

f) Vi legger merke til at $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x)\sin x$. Vi bruker derfor substitusjonen $u = \cos x,\ \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$, og får

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int (1 - u^2)\frac{\mathrm{d}u}{-1} = \int (u^2 - 1)\,\mathrm{d}u$$

Dette gir

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int (u^2 - 1)\,\mathrm{d}u = u^3/3 - u + \mathcal{C} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + \mathcal{C}}}$$

Oppgave 4

a) Nullpunkter for f er gitt ved $f(x) = 0$, det vil si $\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$. Vi bruker at $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ og får

$$1 - \cos^2 x - \cos x - 1 = -\cos^2 x - \cos x = -\cos x(\cos x + 1) = 0$$

Dette gir $\cos x = 0$ eller $\cos x = -1$. Siden $0 < x < 2\pi$, får vi nullpunktene $\underline{\underline{x = \pi/2,\ x = \pi,\ x = 3\pi/2}}$.

b) Vi deriverer f og får

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - (-\sin x) = \underline{\underline{2\sin x\cos x + \sin x}} = \sin x(2\cos x + 1)$$

c) Vi setter opp fortegnsskjema for det faktoriserte uttrykket for f' i området $0 < x < 2\pi$, og ser at f har lokal topp-punkter $\underline{\underline{(2\pi/3, 1/4), (4\pi/3, 1/4)}}$ og lokalt bunnpunkt $\underline{\underline{(\pi, 0)}}$. Merk at $x = 0$ og $x = 2\pi$ ikke gir lokale bunnpnkter for f siden disse verdiene faller utenfor definisjonsmengden.

d) Vi deriverer $f'(x) = 2\sin x\cos x + \sin x$ og får

$$f''(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x = \underline{\underline{2\cos^2 x - 2\sin^2 x + \cos x}}$$

Ved å bruke at $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, kan vi alternativt skrive om dette uttrykket til

$$f''(x) = \underline{\underline{4\cos^2 x + \cos x - 2}}$$

e) Vi løser likningen $f''(x) = 0$, og får

$$4\cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

Dette gir tilnærmede løsninger $x \approx 0.9359, 2.574, 3.709, 5.347$. For å sjekke at løsningene gir vendepunkter for f, må vi sjekke at $f''(x)$ skifter fortegn i disse nullpunktene. Vi setter opp fortegnsskjema for f'', og ser at alle fire nullpunkter gir vendepunkt. Det følger dermed at tilnærmede koordinater for vendepunktene til f er

$$\underline{\underline{(0.9359, -0.9448), (2.574, 0.1323), (3.709, 0.1323), (5.347, -0.9448)}}$$

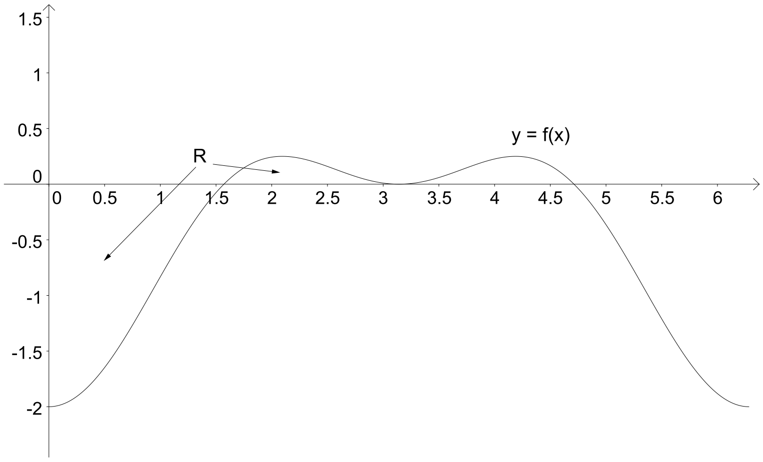
Se egen figur for grafen til f.

f) Vi ser at området R ligger under x-aksen for $x < \pi/2$ og over x-aksen for $x > \pi/2$. Dermed blir arealet av området R gitt ved

$$A = A_1 + A_2 = -\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Vi har $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1$, og bruker at $\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$. Dermed får vi at

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) - \sin x - x + \mathcal{C} = -\frac{1}{2}x - \sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos x + \mathcal{C}$$



Vi setter inn og får

$$A_1 = -\big((-\pi/4 - 1 - 0) - (0)\big) = \pi/4 + 1$$

og

$$A_2 = (-\pi/2) - (-\pi/4 - 1 - 0) = \pi/4 + 1 - \pi/2 = 1 - \pi/4$$

Tilsammen får vi at området R har areal

$$A = A_1 + A_2 = (\pi/4 + 1) + (1 - \pi/4) = \underline{\underline{2}}$$

g) Skjæringspunkter mellom grafene til f og g er gitt ved $f(x) = g(x)$, som gir

$$\sin^2 x - \cos x - 1 = \sin^2 x - \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin x - \cos x = 1$$

Vi løser denne likningen ved å finne en amplitude A og en fasevinkel ϕ slik at $\sin x - \cos x = A\sin(x - \phi)$, det vil si

$$A\sin(x - \phi) = A\sin x\cos\phi - A\sin\phi\cos x = \sin x - \cos x$$

Dette gir likningene $A\sin\phi = 1$ og $A\cos\phi = 1$, og dermed

$$\frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan\phi = 1$$

Vi får $\phi = \pi/4$, som gir $A\sin\pi/4 = 1$, det vil si $A = \sqrt{2}$. Dermed har vi $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \pi/4)$, og vi har redusert den opprinnelige likningen til

$$\sqrt{2}\sin(x - \pi/4) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(x - \pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Siden $\arcsin(1/\sqrt{2}) = \sin^{-1}(1/\sqrt{2}) = \pi/4$, får vi løsningene

$$x = (\pi/4 + n \cdot 2\pi) + \pi/4 = \pi/2 + n \cdot 2\pi$$

og

$$x = (3\pi/4 + n \cdot 2\pi) + \pi/4 = \pi + n \cdot 2\pi$$

der n er et heltall. I området $0 < x < 2\pi$ får vi dermed de to skjæringspunktene $\underline{\underline{x = \pi/2,\ x = \pi}}$ mellom grafene til f og g.