Eksamen i	FO929A Matematikk
	Underveiseksamen
Dato	16. desember 2008
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	6
Vedlegg	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Løsningene av $x^2 - x - 1 = 0$ er $\underline{\underline{x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})}}$.

b) Løsningen av likningssystemet er $\underline{\underline{(x, y, z) = (13, 15, 4)}}$.

c) Vi kvadrerer begge sider av likningen $\sqrt{8x+4} = 2x - 2$, og løser den kvadratisk likningen dette gir. Løsningene er $x = 4$ og $x = 0$. Merk at vi har en $x = 0$ er en falsk løsning, slik at $\sqrt{8x+4} = 2x - 2$ har løsning $\underline{\underline{x = 4}}$.

d) Vi faktoriserer uttrykket på venstre side og setter opp fortegnsskjema, og får løsningene

$$\underline{\underline{\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle}}$$

e) Likningen $\sin v + \cos v = 0$ gir at $\tan v = -1$ ved divisjon med $\cos v$, og denne likningen har løsning $v = \arctan(-1) + n \cdot 180° = -45° + n \cdot 180°$ for n heltall. Løsningene med $0 \leq v < 2\pi$ er da $\underline{\underline{v = \frac{3}{4}\pi}}$ og $\underline{\underline{v = \frac{7}{4}\pi}}$. I grader gir dette $v = 135°$ eller $v = 315°$.

Oppgave 2

a) Lengden til linjestykket AE er $7 + 6\cos(45°) = \underline{\underline{7 + 3\sqrt{2}}}$.

b) Arealet er gitt ved

$$A = (7 + 3\sqrt{2}) \cdot \frac{(5 + 6\sin(45°))}{2} - \frac{6\cos(45°)6\sin(45°)}{2}$$

Siden $6\sin(45°) = 6\cos(45°) = 3\sqrt{2}$, får vi at

$$A = (7 + 3\sqrt{2})\frac{(5 + 3\sqrt{2})}{2} - 9 = \underline{\underline{35/2 + 18\sqrt{2}}} = \underline{\underline{42.9558...}}$$

Oppgave 3

a) Rekken kan skrives som

$$(1+2+3+\cdots+60)-(3+6+9+\cdots+60)$$

Summen av rekken blir dermed

$$\frac{1}{2}(60\cdot 61-20\cdot 63)=\frac{1}{2}(3660-1260)=\underline{\underline{1200}}$$

b) Den geometriske rekken

$$1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots$$

divergerer. Den geometriske rekken

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=2$$

konvergerer.

Oppgave 4

a) Punktet $B=\underline{\underline{(-2,3,6)}}$. Punktet $C=\underline{\underline{(1,0,1)}}$.

b) Prikkproduktet mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CA}$ er 8. Lengden til vektorene er $\sqrt{14}$ og $\sqrt{13}$. Vi får dermed at vinkelen v mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CA}$ tilfredstiller

$$\cos v=\frac{8}{\sqrt{13\cdot 14}}$$

Dette gir $v=\arccos\frac{8}{\sqrt{13\cdot 14}}=\underline{\underline{53.63...^\circ}}$ siden $0^\circ\leq v<180^\circ$.

c) Volumet er gitt ved $|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|/6=|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{AD}|/6$. Vektoren $\overrightarrow{AD}=[3,3,5]$, og kryssproduktet $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}=[-1,9,-6]$. Volumet er dermed

$$V=|\frac{1}{6}[-1,9,-6]\cdot[3,3,5]|=|\frac{1}{6}(-6)|=\underline{\underline{1}}$$

d) Vektoren $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}=[-1,9,-6]$ står normalt på planet som ABC ligger i, og denne vektorene har lengde $\sqrt{1+81+36}=\sqrt{118}$. Vi skalerer vektoren med faktoren $\frac{3}{\sqrt{118}}$ for å få en vektor med lengde 3. En vektor av en gitt lengde vinkelrett til et plan er bestemt opp til fortegn. Derfor er løsningen vektorene $\underline{\underline{\pm\frac{3}{\sqrt{118}}[-1,9,-6]}}$.

Oppgave 5

a) Vi skriver om likningen og får

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}=(5/2)^2$$

Senteret et punktet $\underline{\underline{(\frac{3}{2},-2)}}$. Radiusen til sirkelen er $\underline{\underline{\frac{5}{2}}}$.

b) Sirkelen treffer y-aksen i punktene på y-aksen som har følgende avstand fra punktet $(0, -2)$:

$$\sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} = 2$$

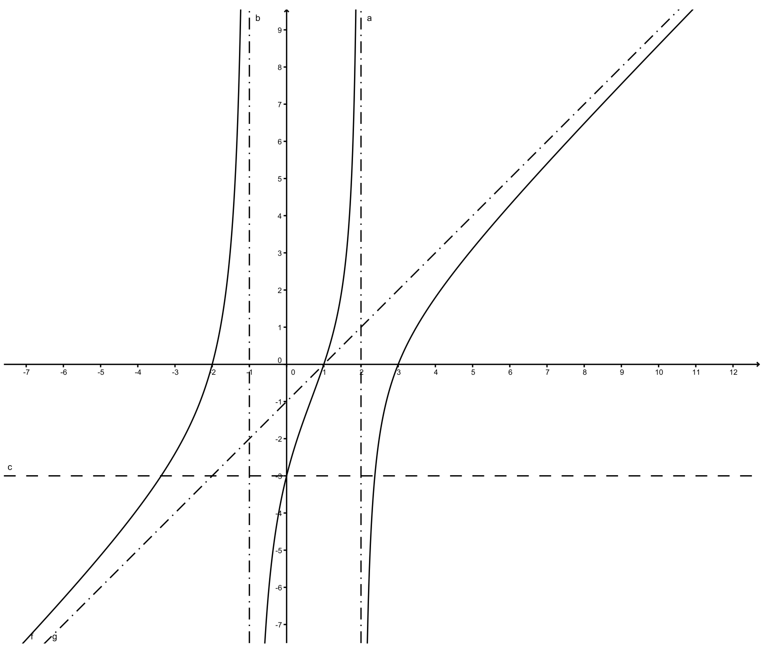
Dette gir punktene $A = (0, -4)$ og $B = (0, 0)$. La vinkelen til sirkelsegmentet være v. Da er v slik at $\tan(v/2) = \frac{2}{3/2} = 4/3$. Dette gir at $v = 2\arctan(3/4) = 106.26...^\circ = 1.8546...$. Arealet til sirkelsegmentet er

$$A = \frac{1}{2}vr^2 = \frac{25}{8}v = \underline{\underline{\frac{25}{4}\arctan(4/3)}} = \underline{\underline{5.7956...}}$$

Oppgave 6

a) Nevneren er lik $(x-2)(x+1)$. Nullpunktene til nevneren er derfor $x = -1$ og $x = 2$. Telleren er ulik null for begge disse verdiene. Derfor har grafen til $f(x)$ vertikale asymptoter $\underline{\underline{x = -1}}$ og $\underline{\underline{x = 2}}$. Dette er de eneste mulige vertikale asymptotene.

b) Nullpunktene til $f(x)$ er nullpunktene til telleren $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Dette er et polynomial av grad 3. Vi prøver oss frem. Polynomet er monisk og har heltallskoeffisienter. Derfor vil eventuelle heltallsløsninger dele konstantleddet 6. Vi prøver de 6 ulike heltall som deler 6 og finner at $\underline{\underline{x = 1, x = -2, x = 3}}$ er heltallsløsninger. Siden polynomet er av grad 3 så er dette alle mulige nullpunkt for $f(x)$.



c) Ved polynomdivisjon får vi at

$$f(x) = x - 1 + 4\frac{1 - x}{x^2 - x - 2}$$

Derfor har $f(x)$ skrå assymptote gitt ved $\underline{\underline{y = x - 1}}$. Dette er en skrå assymptote både for $x \to -\infty$ og for $x \to \infty$. Derfor har $f(x)$ ingen horisontal asymptote.

d) Se graf.

e) Grafen til $f(x)$ skjærer linjen $y = -3$ presis når $f(x) = -3$. Vi løser likningen for x og får

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = -3(x^2 - x - 2)$$

(vi bruker at $x \neq -1, 2$). Dette er ekvivalent til

$$x(x^2 + x - 8) = 0$$

Løsningene er dermed $\underline{\underline{x = 0, x = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}, x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}}}$.