Eksamen i	FO929A - Matematikk
Dato:	1. juni 2011
Målform:	Nynorsk
Talet på oppgåver:	5
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Løysingsforslag.

Oppgåve 1
Løys desse likningane:

a)

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 9 \\ (x-1)^2 = 3^2 & \\ x - 1 &= \pm 3 \\ x = 1 - 3 = \underline{\underline{-2}} &\vee \quad x = 1 + 3 = \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 7\sin x - 5 &= 0, \quad x \in [0, 4\pi\rangle \\ \sin x &= \frac{5}{7} \\ \sin^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) &\approx 0,7956 \\ x \approx 0,7956 + n \cdot 2\pi &\vee \quad x \approx \pi - 0,7956 + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x \in [0, 4\pi\rangle : & \\ x \approx \underline{\underline{0,7956}} &\vee \quad x \approx \pi - 0,7956 = \underline{\underline{2,346}} \quad \vee \\ x \approx 0,7956 + 2\pi = \underline{\underline{7,079}} &\vee \quad x \approx 2,346 + 2\pi = \underline{\underline{8,629}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\ln(x+1)-\ln(x-1) &= 1 \\
\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \ln e \\
\frac{x+1}{x-1} &= e \\
x+1 &= e(x-1) \\
x(1-e) &= -e-1 \\
x &= \frac{-e-1}{1-e} = \underline{\underline{\frac{e+1}{e-1}}}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
7^{x^2-|x|} &= 1 \\
7^{x^2-|x|} &= 7^0 \\
x^2-|x| &= 0 \\
1) \quad x \geq 0 : & \\
x^2-x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x=0 \quad &\vee \quad x=1 \\
2) \quad x \leq 0 : & \\
x^2-(-x) &= 0 \\
x(x+1) &= 0 \\
x=0 \quad &\vee \quad x=-1 \\
\text{Altså:} & \\
x = \underline{\underline{-1}} \quad \vee \quad x = \underline{\underline{0}} \quad \vee \quad x = \underline{\underline{1}} &
\end{aligned}$$

Oppgåve 2

a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{19}+\frac{5}{3x^2}+2x\sqrt[3]{x} = x^{19}+\frac{5}{3}x^{-2}+2x^{4/3} \\
f'(x) &= 19x^{18}+\frac{5}{3}(-2)x^{-3}+2\cdot\frac{4}{3}x^{1/3} = \underline{\underline{19x^{18}-\frac{10}{3x^3}+\frac{8}{3}\sqrt[3]{x}}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
g(x) &= \pi + e^{3x}\sin(1-x^2)\\
g'(x) &= 0 + e^{3x}\cdot 3\cdot\sin(1-x^2) + e^{3x}\cdot\cos(1-x^2)\cdot(1-x^2)' =\\
&\quad 3e^{3x}\sin(1-x^2) - 2xe^{3x}\cos(1-x^2) = \underline{\underline{e^{3x}(3\sin(1-x^2) - 2x\cos(1-x^2))}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
h(x) &= \ln\left(4\cdot\frac{x-1}{x^2+3x}\right) = \ln 4 + \ln(x-1) - \ln(x(x+3)) =\\
&\quad \ln 4 + \ln(x-1) - \ln(x) - \ln(x+3)\\
h'(x) &= 0 + \frac{1}{x-1}\cdot(x-1)' - \frac{1}{x}\cdot(x)' - \frac{1}{x+3}\cdot(x+3)' = \underline{\underline{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}}}
\end{aligned}$$

d) $\int\left(-7x^{-2{,}25} - 3x^{-1} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(-7x^{-2{,}25} - 3x^{-1} + 2x^{-1/2}\right)dx =$
$-7\frac{1}{-2{,}25+1}x^{-2{,}25+1} - 3\ln|x| + 2\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-1/2+1} + C =$
$\frac{7}{\frac{5}{4}}x^{-1{,}25} - 3\ln|x| + \frac{2}{\frac{1}{2}}x^{1/2} + C = \underline{\underline{\frac{28}{5}x^{-1{,}25} - 3\ln|x| + 4\sqrt{x} + C}}$

e) $\int\frac{3\sin x}{\cos^3 x}\,dx$
Variabelskifte:
$u(x) = \cos x$
$\frac{du}{dx} = -\sin x$
$dx = -\frac{1}{\sin x}du.$

$$\begin{aligned}
\int\frac{3\sin x}{\cos^3 x}\,dx &= \int\frac{3\sin x}{u^3}\left(-\frac{1}{\sin x}\right)du = -3\int u^{-3}\,du =\\
&\quad -\frac{3}{-3+1}u^{-3+1} + C = \underline{\underline{\frac{3}{2\cos^2 x} + C}}
\end{aligned}$$

f) $\int_0^\pi t^2\sin(2t)\,dt$
Delvis integrasjon: $\int_a^b u'\cdot v\,dt = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b u'\cdot v\,dt$
$u = t^2,\quad v' = \sin(2t)$
$u' = 2t,\quad v = -1/2\,\cos(2t)$

$$\int_0^\pi t^2\sin(2t)\,dt = \left[t^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2t\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt =$$
$$-\frac{1}{2}\left[t^2\cos(2t)\right]_0^\pi + \int_0^\pi t\cos(2t)\,dt = -\frac{1}{2}\left(\pi^2\cos(2\pi) - 0\right) + \int_0^\pi t\cos(2t)\,dt =$$
$$-\frac{\pi^2}{2} + \int_0^\pi t\cos(2t)\,dt$$

Ny delvis integrasjon:
$u = t, \quad v' = \cos(2t)$
$u' = 1, \quad v = 1/2\ \sin(2t)$

$$\int_0^{\pi} t\cos(2t)\,dt = \left[t\cdot\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\frac{1}{2}\sin(2t)\,dt =$$
$$\frac{1}{2}\left[t\sin(2t)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\pi\sin(2\pi - 0) - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi}\right) =$$
$$0 + \frac{1}{4}(\cos(2\pi) - \cos 0) = 0$$

Altså:

$$\int_0^{\pi} t^2\sin(2t)\,dt = \underline{\underline{-\frac{\pi^2}{2}}} \quad .$$

Oppgåve 3
$A(3,4,0), \quad B(-1,1,0)$.

a) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = [-1-3, 1-4, 0-0] = \underline{\underline{[-4,-3,0]}}$
$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \underline{\underline{5}}$

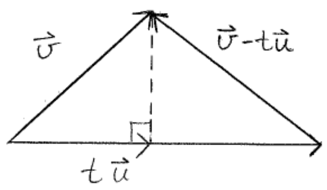
b) $\overrightarrow{u} = [2,1,0]$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{CA} &= -\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{u}. \end{aligned}$$

Med $O(0,0,0)$:
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = [3,4,0] + [2,1,0] = [3+2, 4+1, 0] = [5,5,0]$.
Punktet C har koordinatar $\underline{\underline{(5,5,0)}}$.

c) Av figuren ser vi at $\overrightarrow{v} - t\overrightarrow{u}$ er kortast når vinkelen mellom denne vektoren og $\overrightarrow{u}$ er $90°$. Dermed må skalar-produktet mellom vektorane vere 0:

$$\begin{aligned} &(\overrightarrow{v} - t\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{u} = 0 \\ &\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} - t\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = 0 \\ &[-4,-3,0]\cdot[2,1,0] - t\,|[2,1,0]|^2 = 0 \\ &-8 - 3 - t(2^2+1) = 0 \\ &-11 - 5t = 0 \\ &t = \underline{\underline{-\frac{11}{5}}} \end{aligned}$$



Alternativ metode: Minimere funksjonen $f(t) = |\overrightarrow{v} - t\overrightarrow{u}|^2$.

d) Volumet er ein seksdel av absoluttverdien til trevektorproduktet av $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [-4, -3, 0] \\ \overrightarrow{AC} &= [2, 1, 0] \\ \overrightarrow{AD} &= [2-3, 3-4, 4-0] = [-1, -1, 4] \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = +4 \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-4\cdot 1-(-3)\cdot 2) = 8$$

Dermed vert volumet

$$\frac{1}{6} \cdot |8| = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Oppgåve 4

a) Talet på mogelege utfall: $50 \cdot 49 \cdot 48$.
Talet på gunstige ufall: $5 \cdot 4 \cdot 3$.

$$P(\text{vinn på alle tre lodda}) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{50 \cdot 49 \cdot 48} = \underline{\underline{\frac{1}{1960}}} \quad .$$

b) Talet på utfall som er gunstige for å ikkje vinne: $45 \cdot 44 \cdot 43$.

$$P(\text{ingen vinst}) = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{50 \cdot 49 \cdot 48} = \underline{\underline{\frac{1419}{1960}}}.$$

$$P(\text{minst ein vist}) = 1 - P(\text{ingen vinst}) = 1 - \frac{1419}{1960} = \underline{\underline{\frac{541}{1960}}} \quad .$$

c) Dette er ei aritmetisk rekke med fyrste ledd $a_1 = 1$ og differanse $d = 2$.
Ledd nummer 100 er $a_{100} = a_1 + 99d = 1 + 99 \cdot 2 = 199$. Summen er

$$s_{100} = 100\frac{a_1 + a_{100}}{2} = 100\frac{1+199}{2} = \underline{\underline{10000}} \quad .$$

Oppgåve 5

a) Tida det tar å halvere aktiviteten er T.

$$\begin{aligned} f(t+T) &= \frac{1}{2}f(t) \\ 5e^{-0,12\,(t+T)} &= \frac{1}{2}\cdot 5e^{-0,12\,t} \\ e^{-0,12\,T} &= \frac{1}{2} \\ -0,12\,T &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \\ 0,12\,T &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$T = \frac{\ln 2}{0,12} \approx 5,776.$$

$0,776 \cdot 365 = 283,24 \approx 283.$
Radioaktiviteten er halvert etter $\underline{\underline{\text{5 år og 283 dagar}}}$.

$$\begin{aligned} f(t) &= 0,1 \\ 5e^{-0,12\,t} &= 0,1 \\ e^{-0,12\,t} &= \frac{0,1}{5} \\ -0,12\,t &= \ln\frac{0,1}{5} = -\ln 50 \\ t &= \frac{\ln 50}{0,12} \approx 32,600 \end{aligned}$$

$0,600 \cdot 365 = 219$
Radioaktiviteten er under $0,1$ MBq etter $\underline{\underline{\text{32 år og 219 dagar}}}$.

b)

$$f'(t) = 5e^{-0,12\,t}\cdot(-0,12\,t)' = -0,12 \cdot 5e^{-0,12\,t} = -0,12f(t).$$

Altså: $f'(t) = -0,12f(t)$ (q.e.d.).

$$\begin{aligned} \int_0^{20} f(t)\,dt &= \int_0^{20} 5e^{-0,12\,t}\,dt = \left[5\frac{1}{-0,12}e^{-0,12\,t}\right]_0^{20} = -\frac{5}{0,12}\left(e^{-0,12\cdot 20} - e^{-0,12\cdot 0}\right) = \\ & \frac{5}{0,12}(1 - e^{-2,4}) = \frac{125}{3}\left(1 - e^{-2.4})\right) \approx \underline{\underline{37,89}} \end{aligned}$$

Radioaktiviteten er eit mål på kor mykje stråling som vert sendt ut per tid. Dermed vert integralet eit mål på kor mykje stråling som har blitt sendt til saman i løpet av dei 20 fyrste åra. I dette tilfellet er strålingsmengda 37,89 MBq · år. Dette betyr, igjen, at talet på strålingskvant i løpet av 20 år er $37,89 \cdot 10^6\ 1/s \cdot (60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365)s = 1,195 \cdot 10^{15}$.

c)

$$s_n = f(0)\cdot\Delta x + f(\Delta x)\cdot\Delta x + f(2\Delta x)\cdot\Delta x + ... + f\left((n-1)\Delta x\right)\cdot\Delta x = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

der

$$\begin{aligned} a_1 &= f(0)\Delta x = 5\Delta x \\ a_2 &= f(\Delta x)\Delta x = 5e^{-0,12\Delta x}\Delta x \\ a_3 &= f(2\Delta x)\Delta x = 5e^{-0,12\cdot 2\Delta x}\Delta x = 5\Delta x\left(e^{-0,12\Delta x}\right)^2 \\ &\vdots \\ a_n &= 5e^{-0,12\cdot(n-1)\Delta x}\Delta x = 5\Delta x\left(e^{-0,12\Delta x}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Vi ser at dette er ei geometrisk rekke med $5\Delta x$ som fyrste ledd og $e^{-0,12\,\Delta x}$ som kvotient. Med $n = 20$ vert $\Delta x = 20/20 = 1$. Dermed vert kvotienten $k = e^{-0,12}$.

$$s_{20} = a_1\frac{k^{20}-1}{k-1} = 5\cdot 1\frac{\left(e^{-0,12}\right)^{20}-1}{e^{-0,12}-1} = 5\frac{1-e^{-2.4}}{1-e^{-0,12}} \approx \underline{\underline{40,21}}\ .$$