EKSAMEN I F0929A - MATEMATIKK

Hver oppgave gis lik vekt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

a) Løs ligningen: $\ln(x^2-1)=0$ hvor $\ln(x)$ er den naturlige logaritmen.
Løsningsforslag: Bruk eksponensialfunksjonen på begge sider av ligningen, som gir $x^2-1=1$ som gir $x=\pm\sqrt{2}$.

b) Finn alle løsninger til ligningen $4\sin(x)-1=1$.
Løsningsforslag: $\sin(x)=\frac{1}{2}$ som gir to løsninger i første omløp: $x=\pi/6, x=\pi-\pi/6=\frac{5\pi}{6}$. For finne alle løsninger, legg til heltallsmultipler av 2π, altså $x=\pi/6+2k\pi, x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, hvor k er et vilkårlig helt tall.

c) Deriver funksjonen $f(x)=2/x+15x^9+2,999998989$.
Løsningsforslag: For første ledd bruk enten regelen for derivert av en brøk, eller at $(1/x)'=-1/x^2$. Det gir $f'(x)=-2/x^2+15\cdot 9x^8+0=-2/x^2+135x^8$.

d) Deriver funksjonen $h(x)=e^x\sin(x^2+1)+3^5$.
Løsningsforslag: Her må produktregelen brukes, så kjerneregelen på termen $\sin(x^2+1)$. Det siste leddet er en konstant med derivert lik null. Det gir: $h'(x)=e^x(\sin(x^2+1)+2x\cos(x^2+1))$.

e) Finn alle punkter på grafen til funksjonen $f(x)=x^4-3x^2+4x+1$ hvor tangenten har stigningstall 4. Finn ligningen for en av disse tangentlinjene.
Løsningsforslag: Tangenten til grafen har stigningstall 4 for de punkter x slik at $f'(x)=4$. Så vi finner først den deriverte $f'(x)=4x^3-6x+4$. For at den deriverte skal være lik 4 må altså $4x^3-6x=x(4x^2-6)=0$. Løsninger (alle tre) til denne ligningen er $x=0, x=\pm\sqrt{3/2}$. La oss finne ligningen for tangenten til grafen for $x=0$. Siden vi har $f(0)=1$, så går grafen gjennom punktet $(0,1)$ og tangenten har stigningstall 4. Ligningen blir dermed $y=1+4x$.

Oppgave 2

Når du løser oppgavene under, forklar hvilke metoder du bruker:

a) Finn det bestemmte integralet $\int_{-2}^{2} 1+5x^3+7\sin(x)\,dx$.
Løsningsforslag: $=\int_{-2}^{2} 1\,dx+\int_{-2}^{2} 5x^3+7\sin(x)\,dx=4+0=4$ siden integranden (i det andre integralet i summen) er en odde funksjon og intervallet er symmetrisk om null. (Kan også beregnes enkelt uten å bruke dette).

b) Finn det ubestemmte integralet $\int x\cos(3x)\,dx$.
Løsningsforslag: Bruk delvis integrasjon med $u=x$ og $v'=\cos(3x)$. Det gir $\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\cos(3x)}_{v'}\,dx=\frac{1}{3}x\sin(3x)-\int\frac{1}{3}\sin(3x)\,dx=\frac{1}{3}x\sin(3x)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos(3x)+C$.

c) Finn arealet begrenset av x-aksen, grafen til funksjonen $h(x) = |x| + 3$ og linjene $x = -3$ og $x = 5$.
Løsningsforslag: Dette kan finnes (etter å ha tegnet en figur) geometrisk som (arealet av) et rektangel og to trekanter: $\cdots = 3\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 = \cdots = 41$ eller direkte ved integrasjon. Ved integrasjonen forenkles det ved bruke at $\int_{-3}^{5} h(x)\,dx = \int_{-3}^{0} h(x)\,dx + \int_{0}^{5} h(x)\,dx$. Alternativt kan det brukes (etter å ha vist det) at én antiderivert til $|x|$ er $\frac{1}{2}x|x|$. Da kan integralet løses uten først å dele opp integrasjonsintervallet.

d) Finn det bestemmte integralet $\int_0^{\pi/2} 3x + \cos^2(x)\,dx$.
Løsningsforslag: Den vanskelige delen er $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx$. Den kan finnes på flere måter, det vi har vist i forelesningene er å bruke delvis integrasjon, som gir: $\int_0^{\pi/2} \underbrace{cos(x)}_{u'} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v}\,dx = [\sin(x)\cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} sin(x)\cdot\sin(x)\,dx =$

$\sin(\pi/2)\cos(\pi/2) - \sin(0)\cos(0) + \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx$ som viser at $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx$. Da kan vi summere de to, dele med to, og finner at integralet blir $\pi/4$. Da finner vi til slutt at hele integralet blir $\frac{1}{8}\pi(3\pi + 2) \approx 4,4865$.

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{(x+3)^2}{x-1} + 3x$:

a) Bestem den største mulige definisjonsmengen til $f(x)$. Finn eventuelle skrå, horisontale eller vertikale asymptoter.
Løsningsforslag: Verdien $x = 1$ fører til divisjon med null, og kan ikke brukes. Største mulige definisjonsmengde er derfor $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Grenseverdien for f når x nærmer seg verdien 1 fra venstre eller høyre er minus eller pluss ∞, så linjen $x = 1$ er vertikal asymptote. Det er ingen horisontale asymptoter, men det er en skråasymptote vi kan finne ved først a sette funksjonsuttrykket på felles nevner, og deretter bruke polynomdivisjon. Vi finner først at $f(x) = \frac{4x^2+3x+9}{x-1}$. Polynomdivisjon gir så at $f(x) = 4x + 7 + \frac{16}{x-1}$. Det viser at $4x + 7$ er en skråsymptote.

b) Bestem eventuelle nullpunkter til $f(x)$.
Løsningsforslag: Det er ingen nullpunkter.

c) Bestem hvor $f(x)$ vokser og hvor den avtar. Finn alle topp- og bunnpunkter til grafen til $f(x)$.
Løsningsforslag: Vi finner først $f'(x)$. Bruk først brøkregelen, sett så på felles nevner. Det gir $f'(x) = 4\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$. Tegn nå en fortegnslinje, det gir som resultat at den deriverte er positiv på intervallene $(-\infty, -1)$ og $(3, \infty)$, negativ på intervallene $(-1, 1)$ og $(1, 3)$. Det gir hvor funksjonen er voksende og hvor avtagende. Lokalt topp-punkt på grafen for $x = -1$, og lokalt bunnpunkt på grafen for $x = 3$. Dette kan leses av fra fortegnsskjemaet.

d) Bestem hvor grafen til $f(x)$ krummer oppover, og hvor den krummer nedover. Finn eventuelle vendepunkter.
LØSNINGSFORSLAG: Vi trenger den andrederiverte, som er $f''(x) = \frac{32}{(x-1)^3}$. (Bruk brøkregelen, så forenkling). Dette er positivt for $x > 1$ og negativt for $x < 1$. Grafen krummer da oppover for $x > 1$ og ned for $x < 1$.

e) Tegn en skisse av grafen til $f(x)$.

OPPGAVE 4

a) Per åpner en bankkonto og setter inn 2500kr hver første januar, første gang den 1.1.2005, siste gang den 1.1.2014. Bankkontoen har en fast rente på 3% per år. Hvor mye står inne på kontoen rett etter siste innskudd?
LØSNINGSFORSLAG: Det blir til sammen 10 innskudd, så innestående beløp på konto, med renter og renters rente, blir rett etter siste innskudd: $2500 + 2500 \cdot 1,03 + 2500 \cdot 1,03^2 + \cdots + 2500 \cdot 1,03^9 = 2500 \cdot \frac{1,03^{10}-1}{1,03-1} = 11,46388 \cdot 2500$ som er tilnærmet 28660 kr. (lærebok side 644).

b) Et legeme formes ved å rotere grafen til funksjonen $f(x) = \ln(x)$ om x-aksen. Finn volumet av dette legemet mellom linjene $x = 1$ og $x = e$. (Du kan finne at delvis integrasjon er nyttig for å utføre integrasjonen).
LØSNINGSFORSLAG: Volumet er gitt ved integralet (det er et omdreiningslegeme) $V = \pi \int_1^e (\ln(x))^2\, dx$. Vi bruker delvis integrasjon, og velger $u = \ln(x)$, $v' = \ln(x)$. Da er $v = x(\ln(x) - 1)$ (som kan finnes ved en ekstra delvis integrasjon, med $u' = 1$, $v = \ln(x)$). Det gir $\pi \int_1^e \underbrace{\ln(x)}_{u} \underbrace{\ln(x)}_{v'}\, dx = \pi[x\ln(x)(\ln(x) - 1)]_1^e - \pi \int_1^e \frac{1}{x} x(\ln(x) - 1)\, dx = 0 - \int_1^e (\ln(x) - 1)\, dx = \int_1^e\, dx - \int_1^e \ln(x)\, dx = \pi(e - 2) \approx 2,26.$

OPPGAVE 5

Vektorene $\vec{u} = [2, -2, 6]$ og $\vec{v} = [4, 1, 0]$ er gitt.

a) Finn lengden av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, og finn en tilnærmet verdi for vinkelen dem imellom.
LØSNINGSFORSLAG: $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$, $|\vec{v}| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$. La vinkelen dem imellom være θ, da bruker vi skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\theta)$ som gir $\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{8-2+0}{\sqrt{44\cdot 17}} \approx 0.2194$ som gir vinkelen tilnærmet som 1.3496 radianer eller 77.3 grader.

b) Bestem alle vektorene $\vec{w}$ som er slik at $\vec{w}$ står normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$, og som er slik at $|\vec{w}| = 5$.
Løsningsforslag: Vi bruker kryssproduktet som gir en vektor som står normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Etterpå tilpasser vi lengden. $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $\cdots = [-6, 24, 10]$. La oss kalle denne vektoren $\vec{w_o}$. Da er den søkte vektoren $\vec{w}$ gitt som $\vec{w} = k \cdot \vec{w_0}$ for et tall k slik at $|\vec{w}| = |k||\vec{w_0}| = 5$. Løsning av ligningen gir $|k| = \frac{5}{\sqrt{712}} = 0.18738$. Det gir de to mulighetene for $\vec{w}$ som $[-1.124, 4.497, 1.874]$ eller $[1.124, -4.497, -1.874]$.

c) Linjen l går gjennom punktet $P_0(0, 0, 6)$ og er parallell med $\vec{u}$. Planet α er gitt ved ligningen

$$4x + 5y - 6z - 7 = 0$$

Finn punktet der linjen l skjærer planet α.
Løsningsforslag: Først finner vi en parameterfremstilling for linjen l, som er

$$x = 0 + 2t = 2t \tag{1}$$
$$y = 0 + (-2)t = -2t \tag{2}$$
$$z = 6 + 6t. \tag{3}$$

Sett dette inn i ligningen for planet α, det gir en ligning for parameteren t: $4 \cdot 2t + 5 \cdot (-2t) - 6(6 + 6t) - 7 = 0$, som forenkles til $t = -\frac{43}{38}$, som er parameterverdien som gir skjæringspunktet. Sett denne verdien inn i parameterfremstillingen for linjen l, gir at skjæringspunktet har koordinatene $x = -2 \cdot \frac{43}{38} = -\frac{43}{19}, y = -2 \cdot -\frac{43}{38} = \frac{43}{19}, z = 6 + 6 \cdot -\frac{43}{38} = -\frac{15}{19}$.

d) Linjen m er gitt ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3s \\ y &= 3 + s \\ z &= 4. \end{aligned}$$

Finnes et plan β slik at linjen l og linjen m begge ligger på planet β?
Løsningsforslag: For at et slikt plan β skal finnes, må en av to betingelser være oppfyllt: enten må linjene være parallelle, eller de må ha ett skjæringspunkt. For å være parallelle, må de ha parallelle retningsvektorer (som de ikke har). For å sjekke om de har ett punkt felles, kan vi sette de to parameterfremstillingene lik hverandre, som gir en ligning. Denne ligningen har ingen løsning, så intet skjæringspunkt. Vi kan konkludere at et slikt plan ikke finnes.