8.2 Derivasjon

Den <u>deriverte</u> til en funksjon f i x er

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f er <u>deriverbar</u> i x hvis grensen $f'(x)$ eksisterer

Alternativ notasjon til $f'(x)$:

$\frac{d f(x)}{dx}$, $(D_x f)(x)$, $\dot{f}(x)$ (oftest brukt om derivert m.h.p. tid innenfor fysikk.)

$f'(x)$ eksisterer $\Leftrightarrow$ grafen til f har en tangent i $(x, f(x))$.

$f'(x)$ er stigningstallet til tangenten.

[Dette forutsetter at x er et punkt i definisjonsmengden til f med ~~som~~ har en åpen omegn som også er i definisjonsmengden.]

$f'(x)$ er (momentan) vekstfart / endringsrate til f i x.

Derivasjon er en lineær operasjon

$$(a \cdot u(x) + b \cdot v(x))' = a \cdot u'(x) + b \cdot v'(x)$$

a, b konstanter.

Dette følger fra en kombinasjon av

1) $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$ og

2) $(a \cdot u(x))' = a\ u(x)$

Vi syner 1) fra definisjonen av en derivert funksjon:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(u(x+h) + v(x+h)) - (u(x) + v(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

forutsatt at begge grensene til høyre eksisterer (fra grenseverdi setningene 7.3 p. 213).

Vi syner 2) fra definisjonen av en derivert funksjon:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a \cdot u(x+h) - a(u(x))}{h} = \lim_{h\to 0} a \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

$$= a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$ fra grenseverdi setningen.

Deriverte til noen funksjoner

* Vi har sett at $(a)' = 0$ for en konstant funksjon med verdi a, "= vekstfarten til en konstant funksjon er null".

* $(x)' = 1$ fordi: $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1$.

Siden derivasjon er en lineær operasjon får vi

$$(ax+b)' = a(x)' + b(1)' = a$$

Videre har vi regnet ut følgende derivert

$(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$ (oppgave)

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

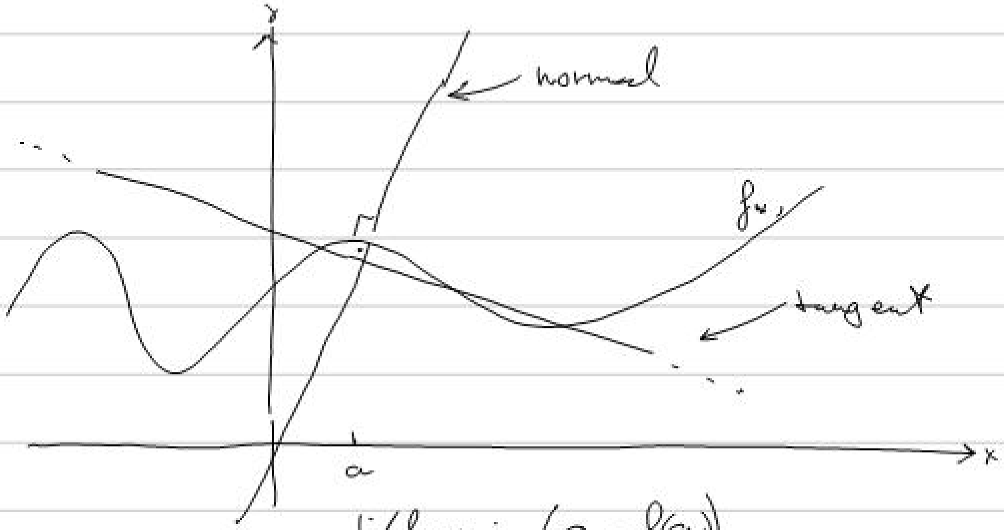
for alle heltall $n \geq 1$

Dette kan synes ved å bruke binomialformelen til å gange ut $(x+h)^n$. ~~eller ve~~

En annen metode er å bruke matematisk induksjon m.h.p n og produktregelen for derivasjon (8.9).

En kan syne at $(x^r)' = r x^{r-1}$ for alle reelle tall r.

La $f(x)$ vere en funksjon



til $f(x)$ i $(a, f(a))$

Tangentlinjen har stigningstall $f'(a)$ og normalen har stigningstall $\frac{-1}{f'(a)}$ (forutsatt at $f'(a) \neq 0$).
(se 3.4 i boka)

Linjen med stigningstall $f'(a)$ gjennom $(a, f(a))$ er

$$Y = f(a) + f'(a)(x-a)$$ Tangentlinjen

Linjen med stigningstall $\frac{-1}{f'(a)}$ gjennom $(a, f(a))$ er

$$Y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$$ normal linjen

Eksempler ble gitt på tavlen.