Torsdag 15 jan. 8.5 Krumning og vendepunkt

$f(x)$ funksjon med definisjonsmengde D

"Den deriverte til f" $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = D_x(f(x))$

er en funksjon med definisjonsmengd inneholdt i D
(det kan være punkt i D hvor $f'(x)$ ikke eksisterer).

Vi kan gjenta operasjonen å derivere flere ganger

$$(f'(x))' = f''(x) \quad \text{dobbel derivert til } f$$

$$((f'(x))')' = f'''(x) \quad \text{trippel derivert til } f.$$

Alternativ notasjon: $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = D_x^2 (f(x))$
$= f^{(2)}(x)$

Derivere n ganger: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f = D_x^n (f(x))$

Merk 1) $f^n(x) = f(x) \cdots f(x)$

men $f^{(n)}(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots \frac{d}{dx}(f)\right.\right.\right.}_{n \text{ ganger}} \cdots)$

2) Vi skriver $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f$

~~ikke~~ $\cancel{\frac{d^n}{d^n x}}$

Eks

$f(x) = x^3 + 2x$

$f'(x) = 3x^2 + 2$

$f''(x) = (3x^2+2)' = 6x$

$f'''(x) = (6x)' = 6$, $f^{(4)}(x) = (6)' = 0$

$f^{(n)}(x) = 0 \quad n \geq 4$.

Hvis $p(x)$ er et polynom av grad n

så er $\frac{d^m}{dx^m} p(x) = 0$ for $m \geq n+1$.

$f(x) = x^n$, $f^{(1)} = n\,x^{n-1}$

$f^{(2)} = n(n-1)\,x^{n-2}$, $f^{(3)} = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$

$f^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}$ etc.

$f^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \cdot \overset{1}{\widetilde{x^0}} = n!$

$f^{(m)} = 0$ for $m > n+1$

Flere eksempler

$$f(x) = 1/x \qquad f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)' = \left(-x^{-2}\right)' = -(-2)\,x^{-2-1} = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = \left(2\cdot x^{-3}\right)' = 2(-3)\,x^{-3-1} = \frac{-6}{x^4}.$$

$$f'(x) = -f(x)^2$$

$$f(x) = x^{3/2} = x\cdot\sqrt{x}.$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\,x^{3/2-1} = \frac{3}{2}\,x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}\,x^{1/2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,x^{1/2-1} = \frac{3}{4}\,x^{-1/2}$$

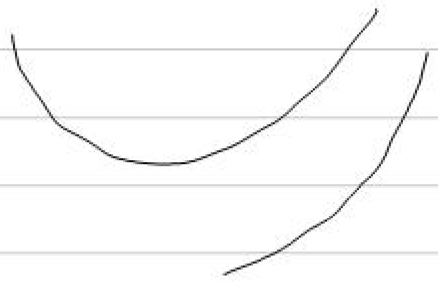
$$= \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}f = \left(\frac{3}{4}\,x^{-1/2}\right)' = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1/2-1} = \frac{-3}{8}\,x^{-3/2}$$

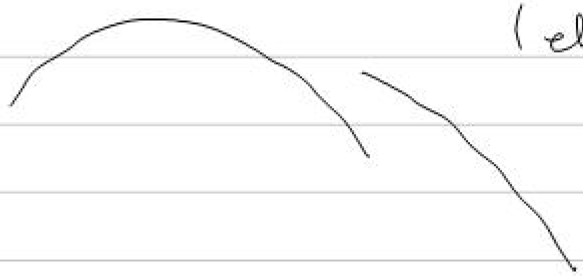
$$= \underline{\frac{-3}{8\,x\sqrt{x}}}$$

Vi ser at: $f^{(3)} = \frac{-3}{8\,f(x)}$

$$f(x)\cdot f^{(3)} = -3/8.$$



(ekte) konkav opp
(alternativt : konveks)



(ekte) konkav ned
(alternativt : konkav)

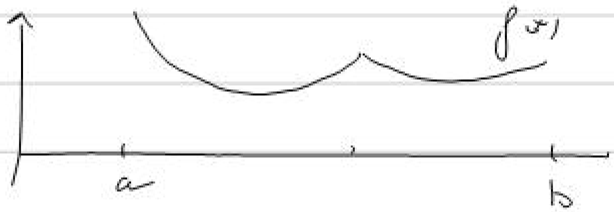
Anta $f'(x)$ og $f''(x)$ eksisterer på en åpen intervall (a,b)

Konkav opp på intervall (a, b) : $f'(x)$ øker $\Leftrightarrow$ $f''(x) > 0$

Konkav ned på intervallen (a, b) :

$f'(x)$ avtar $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$

Hvis $f'(x)$ og $f''(x)$ ikke eksisterer i alle punkt i intervallen (a, b) er det ikke tilstrekkelig å sjekke fortegn til $f''(x)$ (der den eksisterer)



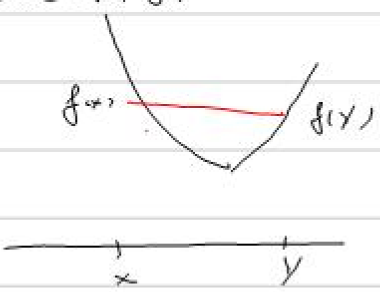
$f(x)$ ikke konkav opp på (a, b) selv om $f''(x) > 0$ hvor den eksisterer.

Def. av konkav opp.

$f(x)$ er konkav opp på en open intervall (a, b) hvis for alle $x \neq y$ i (a, b)

$$t f(x) + (1-t) f(y) > f(tx + (1-t) y)$$
$$0 < t < 1$$

Dette vil si:

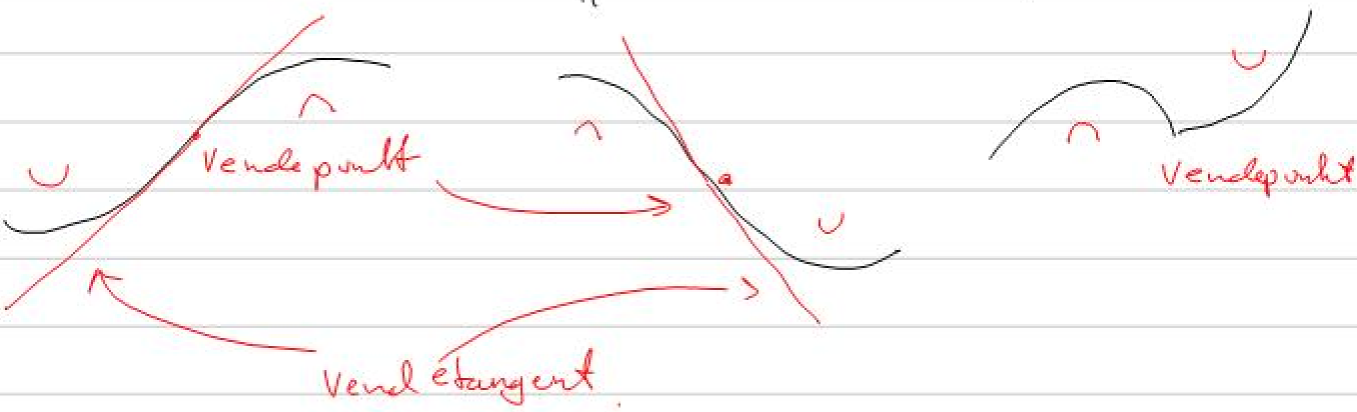


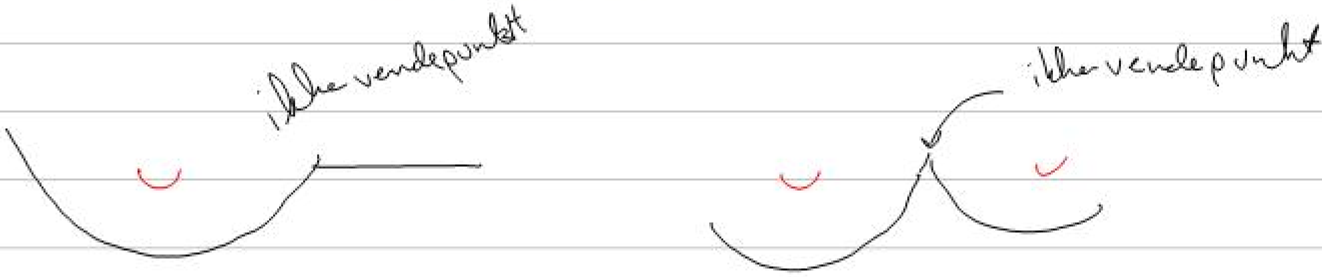
Konkav opp

"Linjen mellom $(x, f(x))$ og $(y, f(y))$ skal ligge <u>over</u> grafen til f."

f på (a, b) er konkav ned $\iff$ $-f$ på (a, b) er konkav opp.

Def Et vendepunkt $(x, f(x))$ til (grafen til) f er et punkt hvor grafen snur fra konkav ned til konkav opp eller motsatt.





Hvis $f''(x)$ eksisterer i (a, b), $f''(c) = 0$, $c \in (a, b)$ og $f''(x)$ skifter fortegn i c da er $(c, f(c))$ et vendepunkt.

"For å finne vendepunkt til f undersøker vi punkt c slik 1) $f''(c)$ ikke eksisterer eller 2) $f''(c) = 0$".

Eksempel $f(x) = x^3 + 3x^2$ Finn vendepunkt

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

$f''(x) = 6 \cdot x + 6 = 6(x+1)$

Likning: $f''(x) = 0$ gir løsningen $x = -1$.

$f''(x)$ skifter fortegn fra negativ til positiv ved $x = -1$.
Så $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$ er et vendepunkt
Dette er det eneste vendepunktet.

Vi gjør litt mer funksjonsdrøfting.
Vi finner x-verdiene hvor $f'(x) = 0$
$3x(x+2) = 0$ har løsning $x = -2$ og $x = 0$.
Dette er de eneste kritiske punktene til f
siden $f'(x)$ eksisterer for alle x og det er ingen (endepunkt) randpunkt på definisjonsmengden til f (som er $\mathbb{R}$)

$(-2, f(-2)) = (-2, (-2)^3 + 3(-2)^2) = (-2, 4)$
er ett toppunkt siden grafen er konkav ned
$(0, f(0)) = (0, 0^3 + 3 \cdot 0^2) = (0, 0)$
er ett bunnpunkt siden grafen er konkav opp.

Sjekker hvor f krysser x-aksen: $x^3 + 3x^2 = 0$
$x^2(x+3) = 0$ så $x = 0$ og $x = -3$.

$f(x) = x^3 + 3x^2$ krysser x-aksen: 0 og -3

toppunkt: $(-2, 4)$

bunnpunkt: $(0, 0)$

Konkav opp for $x > -1$

Konkav ned for $x < -1$

Vendepunkt: $(-1, 2)$