Man. 19 januar. 8.8 Sammensatte funksjoner, Kjerneregel

u, g funksjoner

ytre funksjon

indre funksjon eller kjerne

Sammensatt funksjon $g(u(x))$

" først u så g "

"ring" eller "sirkel"

Alternativ notasjon for sammensatt funksjon $(g \circ u)(x)$

$(= g(u(x)) .)$

Eksempler 1) $g(x) = x^3$, $u(x) = 1 + x^2$

$$g \circ u(x) = g\big(u(x)\big) = g(1 + x^2) = (1 + x^2)^3$$

2) $g(u) = \sqrt{u}$, $u(x) = x^3 - 8$

$$g \circ u(x) = g\big(u(x)\big) = \sqrt{x^3 - 8}$$

største definisjonsmengde for $g \circ u$ er $[2, \infty\rangle$

d.v.s. $x \geq 2$.

Definisjonsmengda til $g \circ u$:

Avgrenser definisjonsmengden til u slik at verdimengden til u er inneholdt i definisjonsmengden til g.

(en undermengde av)

- La $g(y) = \frac{1}{y^2}$ og $u(x) = \sin x$

Finn $g \circ u(x)$ og $u \circ g(x)$.

(gikk gjennom det på tavlen)

- $g(x) = \frac{1}{x}$, $u(x) = 1 + x^2$

$s(x) = \tan(x)$

Hva er $g \circ u \circ s\,(x)$?

$= g(u(s(x))) = \frac{1}{1+(\tan x)^2}$

$g(u(s(x))) = g(u(\tan(x))) = g(1+(\tan x)^2)$

$= 1/\ 1+(\tan x)^2$.

Deriverte av en sammensatt funksjon

$$\frac{d}{dx}\, g \circ u(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\, g \circ u(x+h) - g \circ u(x) \,\right]$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(u(x+h)) - g(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

forutsatt at $\Delta u = u(x+h) - u(x) \neq 0$. (når $h \to 0$)

$\Delta u \neq 0$ når h er nær 0 hvis $u'(x) \neq 0$.

Vi forutsetter at $u'(x) \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\, g \circ u(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(u(x) + \Delta u) - g(u(x))}{\Delta u} \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Δu går mot 0 når h går mot 0.

$$= \frac{d}{dx} g \circ u(x) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{g(u(x)+\Delta u) - g(u(x))}{\Delta u} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

(grenseverdisetningene)

$$= g'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Forutsatt at $g'(u(x))$ eksisterer og at $u'(x)$ eksisterer og er ulik 0.

Hvis $u'(x) = 0$ så kan vi syne at $\frac{d}{dx} g \circ u(x) = 0$
(Syn dette!)

Kjerneregelen (Viktig!)

Anta $u'(x)$ og $g'(u(x))$ eksisterer.

Da er $\boxed{(g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)}$

Med alternativ notasjon

$$\frac{d}{dx}(g \circ u)(x) = \frac{dg}{du}(u(x)) \cdot \frac{du}{dx}(x)$$

4) $(g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$ Kjerneregelen.

Eks 1) $g(x) = x^5$, $u(x) = 1 + x$

$g'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

$g \circ u(x) = (1+x)^5$

$$\frac{d}{dx}(1+x)^5 = g'(1+x) \cdot u'(x)$$
$$= 5(1+x)^4 \cdot 1 = \underline{5(1+x)^4}$$

2) $f(x) = (1 + x^3)^5$

Prøver med $u(x) = 1 + x^3$ og $g(u) = u^5$

$u'(x) = 3x^2$ $g'(u) = 5u^4$

$f(x) = g \circ u(x)$

$f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

$$= 5(u(x))^4 \cdot 3x^2 = \underline{15x^2(1+x^3)^4}$$

3) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $x \neq \pm 1$

Prøver: $u(x) = 1 - x^2$, $g(u) = \frac{1}{u} = u^{-1}$

$u'(x) = -2x$ $g'(u) = -1 \cdot u^{-2} = \frac{-1}{u^2}$

$$f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{-1}{(1-x^2)^2} \cdot (-2x) = \underline{\frac{2x}{(1-x^2)^2}}$$

$$f(x) = (\underbrace{1 + 2x + \sqrt{x}}_{u(x)\ \text{kjernen}})^{9/4}$$

$g(u) = u^{9/4}$.

$$g'(x) = \frac{9}{4} u^{9/4 - 1} = \frac{9}{4} u^{\frac{9-4}{4}} = \frac{9}{4} u^{\frac{5}{4}}$$

$$u'(x) = (1 + 2x + \sqrt{x})' = 2 + (x^{1/2})'$$
$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot x^{1/2 - 1} = 2 + \frac{1}{2} x^{-1/2} = \underline{2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) = \underline{\frac{9}{4}(1 + 2x + \sqrt{x})^{5/4} \cdot \left(2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}$$

5) Anta at vi har synt at $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ for $n \geq 1$.
Vi skal syne at formelen også holder for $n \leq 0$

$n = 0$ ok fordi: $\frac{d}{dx} x^0 = \frac{d}{dx} 1 = 0$ (og dette er $0 \cdot x^{-1}$).

$n < 0$, da er $-n > 0$.

$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^{-n}}$$ bruker kjerne regelen.

med $g(u) = \frac{1}{u} = u^{-1}$ og $u(x) = x^{-n}$.

$g'(u) = \frac{-1}{u^2}$ (kjent derivert)

$u'(x) = -n\, x^{-n-1}$

Så $\frac{d}{dx} x^n = g'(x^{-n}) \cdot u'(x) = \frac{-1}{(x^{-n})^2} \cdot (-n \cdot x^{-n-1})$

$= n \cdot x^{-n-1+2n} = \underline{n\, x^{n-1}}$.