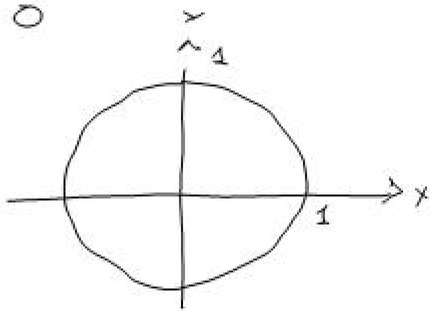
29januar 09

Implisitt derivasjon

La $F(x,y)$ vere en funksjon av to variabler x og y.
Grafen til $F(x,y)=0$ består av alle par (x,y) som tilfredstiller likningen $F(x,y)=0$.

<u>Eks</u> $F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

Grafen er enhetssirkelen



$F(x,y) = y - f(x)$

Grafen $y - f(x) = 0$ er grafen til funksjonen $y = f(x)$.
Vi sier at y er eksplisitt gitt som en funksjon av x.

I eksempelet $x^2+y^2-1 = 0$ er y ikke eksplisitt gitt som en funksjon av x
Ofte er y lokalt gitt som en funksjon av x; gjerne på ulike måter

$y^2 = 1-x^2$ så $y = \sqrt{1-x^2}$ eller

$y = -\sqrt{1-x^2}$.

Vi skal nå uttrykke $\frac{dy}{dx}$ ved hjelp av x og y. (på grafen).

$$F(x, y(x)) = 0$$

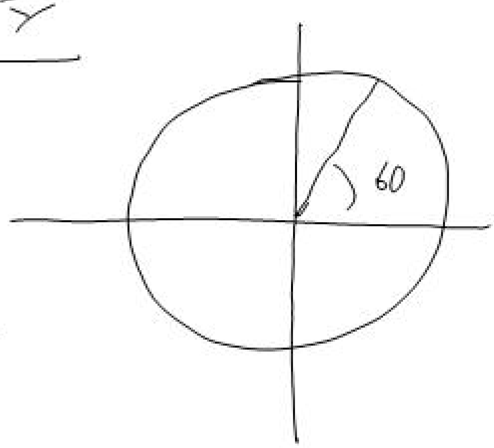
$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0.$$

Dette gir en lineær likning i $\frac{dy}{dx}$ med koeffisienter funksjoner av x og y.

<u>Eks</u> Sirkelen $F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0.$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + (y(x))^2 - 1\right) = 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

når $y \neq 0$ så $\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$



$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ er et punkt på sirkelen

stigningstallet til tangenten i dette punktet er $\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ er også et punkt på sirkelen

stigningstallet til tangenten i punktet $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

er $\frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$F(x,y) = \frac{\pi}{4} y + \sin y - x^2 - \cos x = 0$$

ikke lett å løse for y.

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ er et punkt på grafen til $F(x,y) = 0$.

$$\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \right)$$

Hva er $\frac{dy}{dx}$ i punktet $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$?

implisitt derivasjon:

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\pi}{4} \cdot y(x) + \sin(y(x)) - x^2 - \cos x\right] = 0$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{dy}{dx} + \cos(y(x)) \cdot \frac{dy}{dx} - 2x + \sin x = 0.$$

$$\frac{dy}{dx}\left[\frac{\pi}{4} + \cos(y(x))\right] - 2x + \sin x = 0$$

i punktet $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ gir dette

$$\frac{dy}{dx}\left[\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right] = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}$$

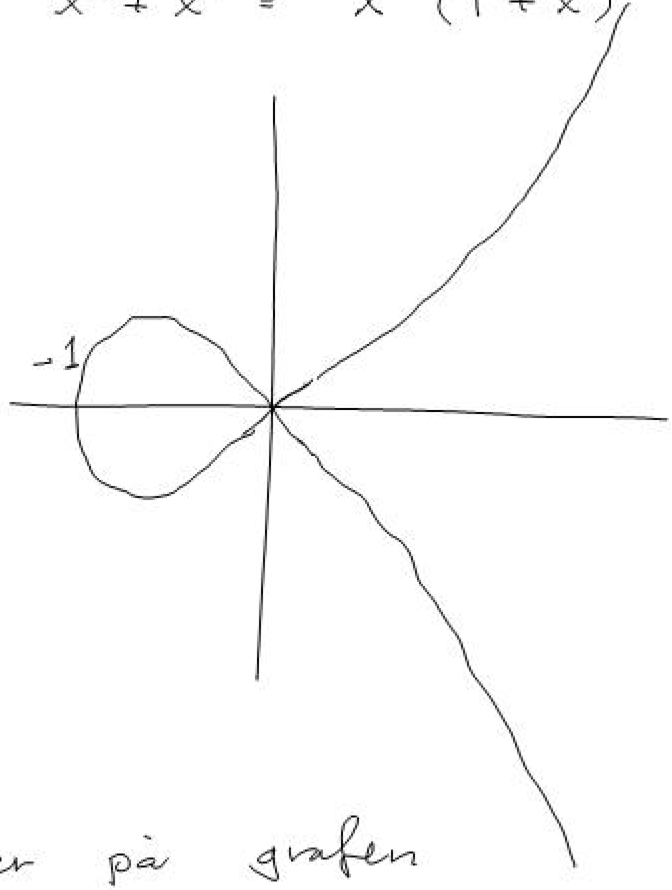
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi/2 - 1/\sqrt{2}}{\pi/4 + 1/\sqrt{2}}$$

Dette er stigningstallet til grafen i punktet $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

La $\quad F(x,y) = y^2 - x^3 - x^2 = 0$

$$y^2 = x^3 + x^2 = x^2(1+x) \qquad x \geq -1.$$

Node



(0.0) er på grafen

(3, 6) ________

Implisit derivasjon

$$\frac{d}{dx}\left[y_{(x)}^2 - x^3 - x^2 \right] = 0$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} - 3x^2 - 2x = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$$

Huis $y \neq 0$: $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 2x}{2y}$

Stignings tallet til tangenten i (3.6) er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 6} = \frac{3^2 + 2}{4} = \underline{\frac{11}{4}}$$

I punktet lengst til venstre : $(-1, 0)$

så får vi $\qquad 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$

$$0 \cdot \frac{dy}{dx} = 3 - 2 = 1.$$

dette indikerer vi har en vertikal tangent

i $(-1, 0)$

Vi ser nå på krysspunktet (0.0) :

$$0 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Hva skjer når vi nærmer oss $(0,0)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2x}{2y}$$

men $\qquad y^2 = x^3 + x^2 \sim x^2$ når x er liten.

$$y \sim +x \text{ eller } -x.$$

så $\frac{dy}{dx}$ er $+1$ eller -1 i $(0,0)$

avhengig av hvilken bane vi tar