Logaritmer og eksponentialfunksjoner.

$a > 1$

$y = a^x$

x positivt heltall:

$$a^x = \overbrace{a \cdots a}^{x \text{ ganger}}$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$a^0 = 1$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ x positivt heltall

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$\left((a^{1/n})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a \right)$$

x rasjonalt tall $x = \frac{p}{q}$ $q \neq 0$ p, q heltall.

$$a^x = (a^p)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

La x være et reelt tall. Vi definerer da

$$a^x = \lim_{\substack{z \to x \\ z \text{ rasjonalt tall}}} a^z$$

. Dette er veldefinert.

Egenskaper til funksjonen $f(x) = a^x$

$a^0 = 1$ $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Definisjon av logaritme funksjon.

$$\operatorname{Log}_a Y = X \qquad Y > 0$$

hvor $a^X = Y$ velldefinert.

Egenskaper til $\operatorname{Log}_a Y$.

$\underline{\operatorname{Log}_a 1 = 0}$ fordi: $a^0 = 1$

$\underline{\operatorname{Log}_a(X \cdot Y) = \operatorname{Log}_a(X) + \operatorname{log}_a(Y)}$

Syner dette: $a^{\log_a X + \log_a Y} = a^{\log_a X} \cdot a^{\log_a Y}$

$$= X \cdot Y$$

$$= a^{\log_a(X \cdot Y)}$$

Derfor er $\log_a X + \log_a Y$

$$= \log_a (X \cdot Y)$$

$\underline{n \cdot \operatorname{Log}_a X = \operatorname{Log}_a X^n}$

$$a^{n \log_a X} = \left(a^{\log_a X}\right)^n = X^n$$

$$= a^{\log_a X^n}$$

Derfor er $n \log_a X = \log_a X^n$

$$-\operatorname{Log}_a X = (-1) \cdot \operatorname{Log}_a X = \operatorname{Log}_a X^{-1} = \operatorname{Log}_a\left(\frac{1}{X}\right)$$

eksempel $\operatorname{Log}_2 16 = \operatorname{Log}_2 2^4 = 4$

$$\operatorname{Log}_4 16 = \operatorname{Log}_4 4^2 = 2$$

$$\mathrm{Log}_{10}(1000) = \mathrm{Log}_{10}\ 10^3 = 3$$

$$\mathrm{Log}_2\ (1024) = \mathrm{Log}_2\ (2^{10}) = 10$$

De vanligste basisene for logaritme er

$a = 10$ $\qquad \mathrm{Log}_{10} = \mathrm{Log}$

$a = e = 2{,}718\ldots$ $\qquad \mathrm{Log}_e = \ln$ naturlig logaritme

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ldots$$

(ikke et rasjonalt tall)

$$\underline{\mathrm{Log}_a\, X = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

$$a = e^{\ln a}$$

$$\left(a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a} \right)$$

$$Y = a^{\log_a Y} = e^{(\log_a Y)\cdot \ln a}$$

$$= e^{\ln Y}$$

Så $\ln Y = \log_a Y \cdot \ln a$

Deler på $\ln a$ $(\neq 0)$: $\mathrm{Log}_a Y = \dfrac{\ln Y}{\ln a}$.

La $Y = e$: $\quad \ln e = \log_a e \cdot \ln a$

$$1 = \log_a(e) \cdot \ln a$$