Naturlig vekst $\frac{d}{dt}X(t) = \lambda \cdot X(t)$

endringsraten er proporsjonal til funksjonsverdien.

$X(t) = k \cdot e^{\lambda \cdot t}$ er en generell løsning til differensial likningen $X'(t) = \lambda X(t)$ hvor k er en konstant.

$$\left((k \cdot e^{\lambda t})' = k(e^{\lambda t})' = k \cdot (\lambda t)' e^{\lambda t} = \lambda(ke^{\lambda t}) \right)$$

Eksempler $X(t)$ folketall (antall bakterier i en bakteriekultur)

Enkel modell: antall individer per tidsenhet $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ er proporsjonal til antall individer.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x$$

Så $X(t) = k\, e^{\lambda t}$

setter inn $t=0$ $X(0) = k \cdot e^0 = k$

$k = X(0)$

$$\underline{X(t) = X_0\, e^{\lambda t}}$$

$X(t)$ pengemengde ved tiden t

$X(0) = X_0$ opprinnelig pengemengde.

Årlig rentesats r (for eksempel $4\% = 0.04$)

$X(1) = X_0 + r \cdot X_0 = (1+r)\, X_0$

$X(2) = X_1 + r \cdot X_1 = (1+r)\, X_1 = (1+r)^2 X_0$

$\vdots$

$X(10) = (1+r)^{10} X_0$ t er antall år.

—

Daglig rente (basert på årlig rente r)

$r_d = \frac{r}{365}$ La n være antall dager

$$X(n \text{ dager}) = \left(1 + \frac{r}{365}\right)^n \cdot X_0$$

$$n \sim \frac{t\ (\text{år})}{365}$$

$$X(t) = \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365 \cdot t} \cdot X_0$$

Vi kan dele året opp i M like deler.

Tar renteutdeling etter hver $\frac{1}{M}$-del av året.

$$X(t) = \left(1 + \frac{r}{M}\right)^{M \cdot t} X_0 .$$

Vi skal skal nå la $M \to \infty$.

$$X(t) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} X_0$$

Husk at $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $(\approx 2{,}718\ldots)$

$$X(t) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r} r \cdot t} X_0$$

$$= \left(\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r} \right)^{r \cdot t} X_0$$

$$\underline{\underline{X(t) = e^{r \cdot t} X_0}}$$

$$(X(t))' = \frac{dx}{dt} = r \cdot X(t)$$

10000 kr står i banken i 10 år med rentesats 10%.

Pengemengde med årlige renter $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \cdot 10000\,\text{kr} = \underline{25937}$ kr

——— kontinuerlige renter $e^{\frac{1}{10} \cdot 10} \cdot 10000\,\text{kr} = \underline{27182}$ kr

Karbon 14 datering.

C^{14}_{12} ustabil isotop av karbon

Levende organismer vil ha en spesifikk andel C^{14}. Dette avtar etter organismen dør.

Dette benyttes til å estimere alder på organisk materiale.

$X(t)$ antall isotoper (i et materiale)

$$\frac{d}{dt} X(t) = -\lambda X(t) \qquad \lambda > 0$$

$$X(t) = X_0 e^{-\lambda t}$$

Halveringstida $t_{1/2}$ er tiden det tar før halvparten av isotopmengden er brutt ned.

Da er $X(t_{1/2}) = \frac{1}{2} X_0$

$$\frac{1}{2} X_0 = X_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$-\ln 2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{-\lambda t_{1/2}} = -\lambda t_{1/2}$$

Så $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ og $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$

Halveringstiden til C^{14} er 5700 år.
(5730)

Eksempel.

Anta konsentrasjonen av C^{14} er 0.36 av opprinnelig konsentrasjon i en gammelt fløte (av tre)

Finn et anslag for alderen basert på C^{14} metoden.

$$X(T) = 0.36 X_0 = X_0 \cdot e^{-\lambda T}$$

$$0.36 = e^{-\lambda T}$$

$$\ln(0.36) = -\lambda \cdot T$$

$$T = \frac{-\ln(0.36)}{\lambda} = \tau_{1/2} \frac{-\ln(0.36)}{\ln 2}$$

$$= (5700 \text{ år}) \cdot (1{,}473..)$$

$$T = \underline{\underline{8400 \text{ år}}}$$

[Spørsmål: hvorfor e $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

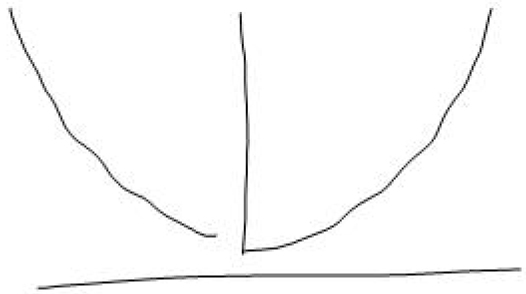
$$e^{\ln\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} = (a)^{-1} = \left(e^{\ln a}\right)^{-1} = e^{-\ln a}$$

Så $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$.]

Enklere: $\ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0 = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$

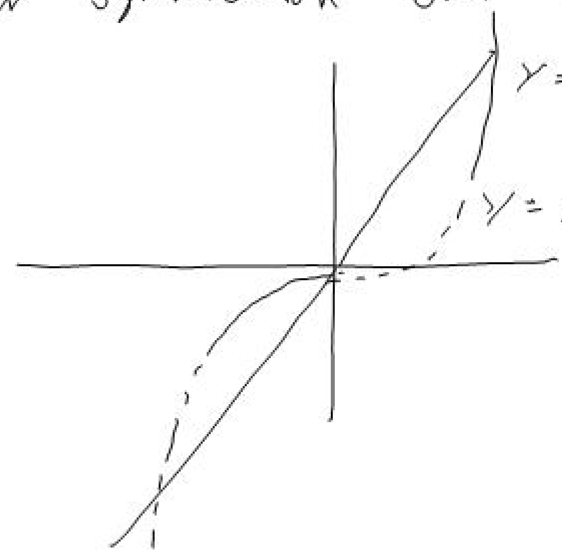
Symmetri til grafer

f er symmetrisk om y-aksen hvis $f(-x) = f(x)$.



$y = x^2$ jevn funksjon

f er symmetrisk om origo hvis $f(-x) = -f(x)$



odde funksjoner

x^n jevn funksjon når n er et jevnt tall.

x^n odde funksjon når n er et odde tall

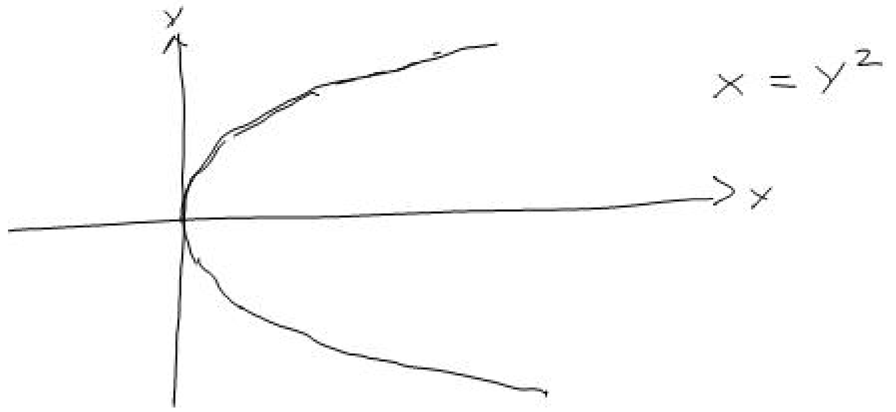
$1 + x + x^2$ er hverken en jevn eller en odde funksjon.

$$1 + x + x^2 = \underbrace{x}_{\text{odde}} + \underbrace{(1 + x^2)}_{\text{jevn}}$$

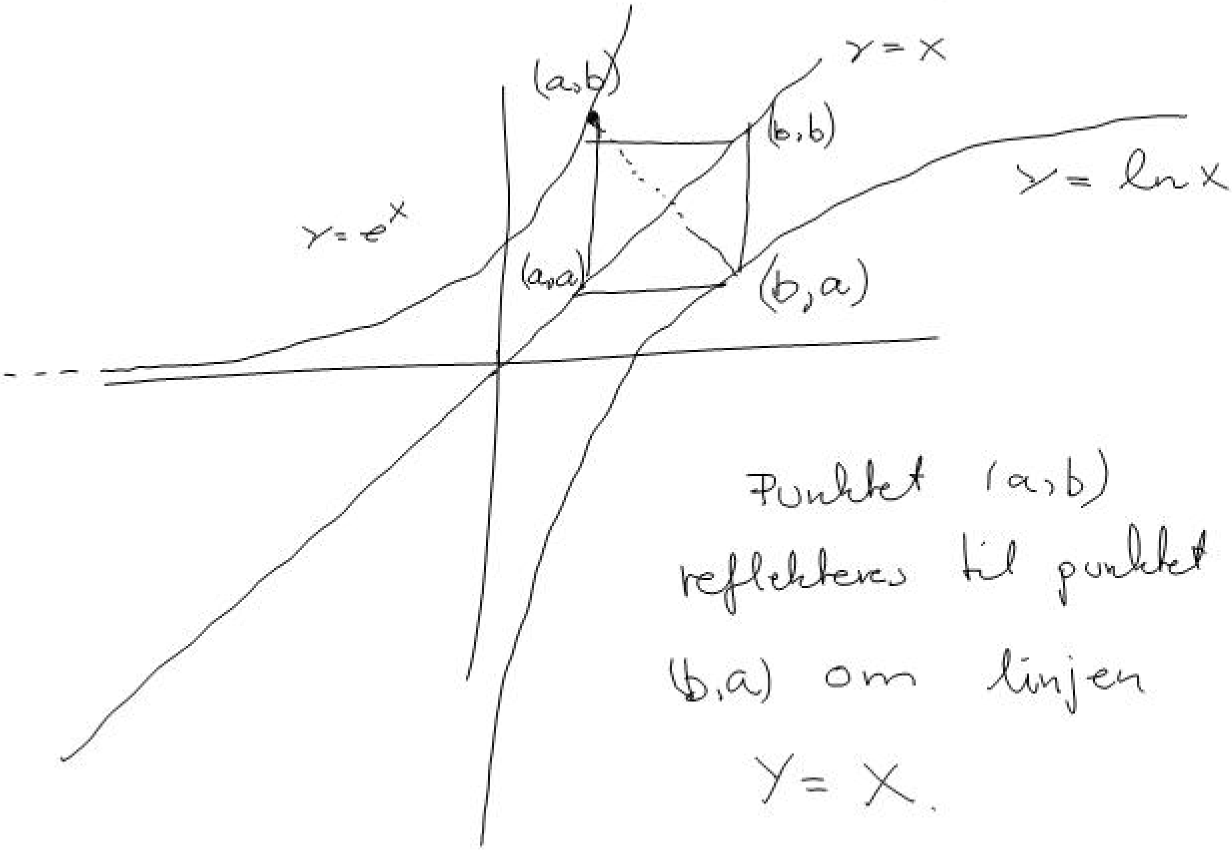
Alle funksjoner (definert på en intervall $[-a, a]$) kan skrives som en sum av en odde og en jevn funksjon.

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{jevn funksjon}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{odde funksjon}}$$

Kurver symmetrisk rundt x-aksen



Kurver symmetrisk om linjen $y = x$

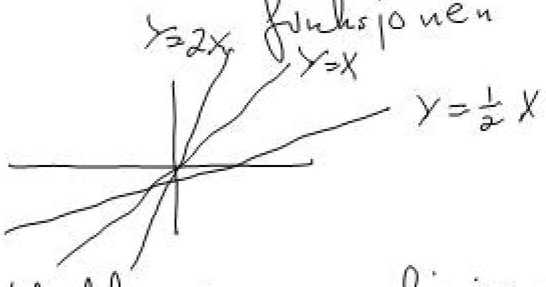


Punktet (a,b) reflekteres til punktet (b,a) om linjen $y = x$.

(x, e^x) reflekteres til (e^x, x)

$= (e^x, \ln(e^x))$

Så punktet (e^x, x) ligger på grafen til funksjonen $\underline{y = \ln x}$.



Linja $y=2x$

Grafen til $y=2x$ reflekteres om linjen $y=x$ til grafen til $y = \frac{1}{2}x$.