16 april 2009 Ubestemte integral av rasjonale funksjoner

En rasjonal funksjon er en kvotient av to polynomer $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Polynomer. $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad n \neq -1$$

og integrasjon er lineært, så vi kan antiderivere alle polynomer.

$$\int 3x^7 + 5x^5 - 2x \, dx$$

$$= 3\int x^7 dx + 5\int x^5 dx - 2\int x \, dx$$

$$= 3\frac{x^8}{8} + 5\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \underline{\frac{3}{8}x^8 + \frac{5}{6}x^6 - x^2 + C}$$

Antiderivert til rasjonale funksjoner på formen

$$\frac{P(x)}{ax+b}$$ ($Q(x)$ er et polynom $ax+b$ av grad en)

$(a \neq 0)$

Ved polynomdivisjon kan finne et polynom $S(x)$ og en konstant k slik at

$$\frac{P(x)}{ax+b} = S(x) + \frac{k}{ax+b}$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx$$

prøver med substitusjon

$u = ax+b$

$du = a\cdot dx$

$(u' = a)$

$$= \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{a}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

polynom

$$\int \frac{P(x)}{ax+b}\,dx = \int S(x)\,dx + \frac{k}{a}\ln|ax+b| + c$$

Finn antiderivert til $\dfrac{x^2-2}{x-1}$.

$$\int \frac{x^2-2}{x-1}\,dx = \int x+1-\frac{1}{x-1}\,dx = \underline{\frac{x^2}{2} + x - \ln|x-1| + c}$$

Finn de antideriverte til $\frac{x^3}{x+1}$.

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{x^3}{x+1}\,dx = \int x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int x\,dx + \int 1\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \underline{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C}$$

15.7 Delbrøksoppspalting.

$$\int \frac{1}{x^2 - x}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

Dette kan skrives som (er lik) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$

for konstanter A og B.

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \qquad (\text{for alle } x)$$

Finner A og B:

$$\left(\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \right) \cdot x(x-1)$$

$$1 = (x-1)A + x \cdot B = x(A+B) - A$$

Derfor er $A = -1$ og $B = 1$

$$\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x| + c$$

$$= \underline{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c}$$

Finn de antiderivert til $\frac{1}{x^2-1}$.

$(x^2-1 = (x+1)(x-1))$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$= \frac{A(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}$$

Tellerne må være like

$$1 = A(x-1) + B(x+1) \quad \text{for alle } x.$$

setter inn $x=1$: $\quad 1 = 0 + B(2) \quad$ så $B = \frac{1}{2}$

setter inn $x=-1$: $\quad 1 = A(-2)+0 \quad$ så $A = \frac{-1}{2}$.

(alternativt $\quad 1 = (A+B)\cdot x + B - A \quad \ldots$)

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(- \int\frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|x+1| + \ln|x-1|\right) + c$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c}$$

Finn det ubestemte integralet $\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx$

Faktoriserer nevneren $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

$$\frac{3x-2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Bestemmer A og B :

$$\frac{3x-2}{x^2-4} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{x^2-4}$$

$$3x-2 = A(x+2) + B(x-2) \quad \text{for alle } x$$

setter $x=-2$: $3(-2)-2 = 0 + B(-4)$

$-8 = -4\cdot B$ så $B = 2$

setter $x = 2$: $3(2)-2 = A\cdot 4 + 0$

$4 = 4\cdot A$ så $A = 1$

(Alternativt $3x-2 = (A+B)x + 2(A-B)$.)

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \underline{\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C}$$

$B(x \quad x-1$

$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\, dx$

$B(-1)(-1-1)$

$B\cdot \underbrace{(-1)\cdot(-2)}_{2} = 2\cdot B$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A\,(x-1)^2}{x(x-1)^2} + \frac{Bx(x-1)}{x(x-1)^2} + \frac{C\cdot x}{(x-1)^2 x}$$

Tellerne må være like (felles nevner)

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + C\cdot x \quad \text{for alle } x$$

Setter inn $x=0$ $\quad 1 = A(-1)^2 = A$ $\quad$ så $A=1$

— $x=1$ $\quad 1 = C\cdot 1$ $\quad$ så $C=1$

$-1-1$

$x=-1$ $\quad 1 = A(-2)^2 + B(-1)(-2) + C(-1)$

$$1 = 4 + 2\cdot B - 1$$

$1+1-4 = -2 = 2B$ $\quad$ så $B=-1$.

[alternativt: deriverer $\quad 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + C\cdot x$

$\quad 0 = 2A(x-1) + B(2x-1) + C$

deriverer en gang til:

$\quad 0 = 2A + 2B$ $\quad$ så $B = -A = -1$]

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

$$= \underline{\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C}$$