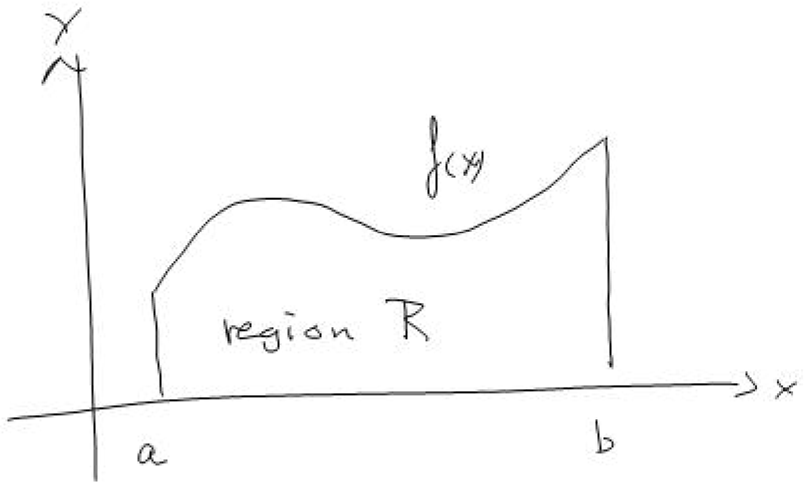
Riemann integral

La $f(x)$ være en ikke-negativ begrenset funksjon på en intervall $[a, b]$. $(a < b)$

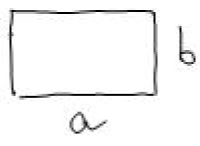
($f(x)$ begrenset: Eksisterer et tall N s.a $f(x) \leq N$ for alle $x \in [a, b]$.)



Hva er arealet til regionen R?

Idee: Tilnærme R med rektangler.

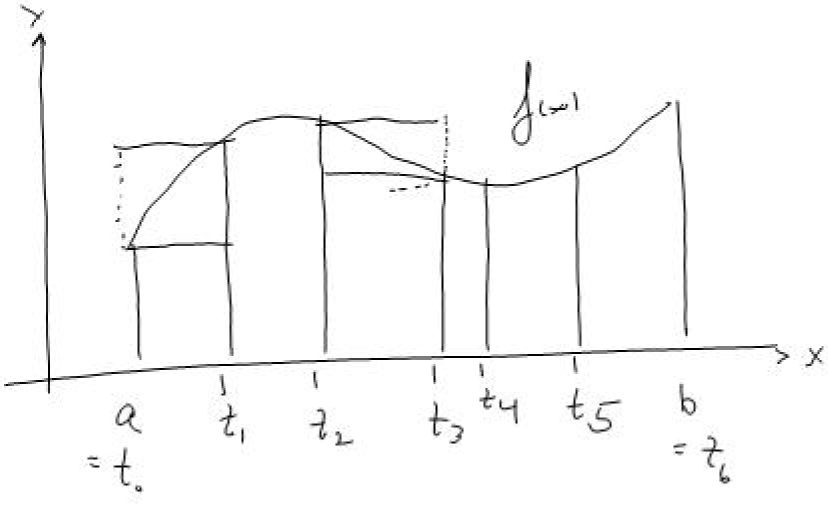
arealet til



er $a \cdot b$.

1) Deler opp intervallen $[a, b]$:

$$a = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < z_n = b$$



2) Nedre Riemann sum (gitt partisjonen i 1))

$$S^{\text{nedre}} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \cdot \min_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$$

Øvre Riemann sum

$$S^{\text{øvre}} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \max_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$$

Partisjoner av $[a,b]$ er en delvis ordna mengde.

S^{nedre} er økende når partisjonene forfines.

$S^{\text{øvre}}$ er avtagende når partisjonene forfines.

$$0 \leq S^{\text{nedre}} \leq S^{\text{øvre}} \leq (b-a) \cdot N$$

hvor N er en øvre grense for funksjonen $f(x)$ på $[a,b]$.

3) La $\quad S^n = \lim\limits_{\substack{\text{alle} \\ \text{partisjoner}}} S^{nedre}$

$$S^ø = \lim\limits_{\substack{\text{alle} \\ \text{partisjoner}}} S^{øvre}$$

Def Vi sier at $\int_a^b f(x)\,dx$ eksisterer hvis $S^n = S^ø$. Da er $\int_a^b f(x)\,dx = S^n = S^ø$

Eksempel på en positiv begrensa funksjon som ikke er Riemann integrerbar:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ rasjonal} \\ 1 & x \text{ irrasjonal} \end{cases}, \quad [a,b] = [0,1].$$

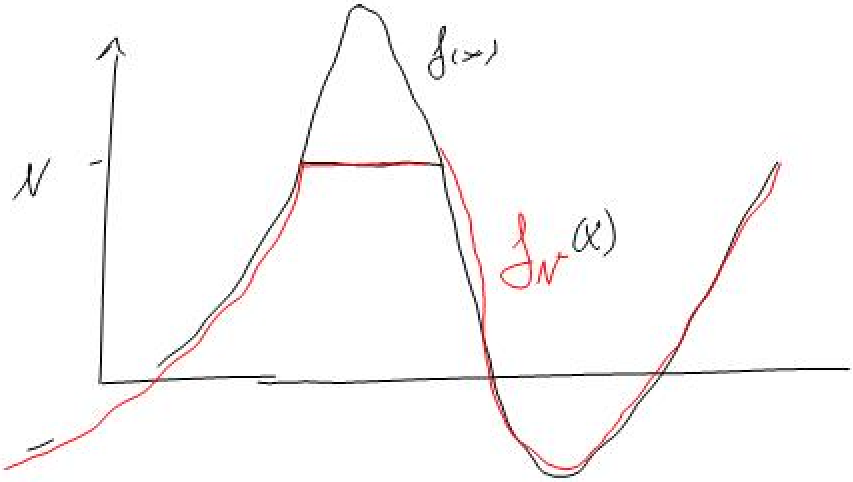
$S^ø = 1, \quad S^n = 0$

$S^ø \neq S^n$ så $\int_0^1 f(x)\,dx$ eksisterer ikke.

Det finnes integrasjonsteorier hvor $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ rasjonal} \\ 1 & x \text{ irrasjonal} \end{cases}$ er integrerbar (integralet er da $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$) og som samsvarer med Riemann integralet for Riemann integrerbare funksjoner

4) Anta $f(x)$ er ikke negativ.

La $f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } f(x) \le N \\ N & \text{hvis } f(x) \ge N \end{cases}$



Vi sier at $\int_a^b f(x)\,dx$ eksisterer hvis

$\int_a^b f_N(x)\,dx$ eksisterer for alle $N > 0$ og

$\lim\limits_{N\to\infty} \int_a^b f_N(x)\,dx$ eksisterer.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b f_N(x)\,dx.$$

La $f(x)$ være en funksjon på $[a, b]$.

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } f(x) \ge 0 \\ 0 & \text{hvis } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{hvis } f(x) < 0 \\ 0 & \text{hvis } f(x) \ge 0 \end{cases}$$

er ikke-negative funksjoner

5) La $f(x)$ være en funksjon på $[a, b]$.
Vi sier at $\int_a^b f(x)\,dx$ eksisterer hvis

$\int_a^b f_+(x)\,dx$ og $\int_a^b f_-(x)\,dx$ eksisterer.

Da er $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx}$

Alle kontinuerlige funksjoner på $[a, b]$ er Riemann integrerbare.
Dette er fremdeles gyldig for begrensa funksjoner ($|f(x)| \leq N$ for alle $x \in [a, b]$) som gjør et endelig antall „hopp".