Eksamen i	FO929A Matematikk
	Ordinær Eksamen
Dato	2. juni 2009
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	5
Vedlegg	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $f(x) = 9x^3 - 14x + \sqrt{24}$ gir $f'(x) = \underline{\underline{27x^2 - 14}}$.

b) $f(x) = (x+1)\sin(2x)$ gir $f'(x) = 1 \cdot \sin(2x) + (x+1) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \underline{\underline{\sin(2x) + 2(x+1)\cos(2x)}}$ ved produktregelen.

c) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = (x^2+1)^{-3/2}$ gir $f'(x) = -3/2(x^2+1)^{-5/2} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{-3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}}}$ ved kjerneregelen.

d) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 3} = \frac{u}{v}$ gir $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\cos x(\cos x + 3) - (\sin x - 1)(-\sin x)}{(\cos x + 3)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 3\cos x - \sin x}{(\cos x + 3)^2} = \underline{\underline{\frac{1 - \sin x + 3\cos x}{(\cos x + 3)^2}}}$ ved brøkregelen.

e) $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x+2})$ gir $f'(x) = (\frac{2x-1}{x+2})^{-1} \cdot \frac{2(x+2) - (2x-1)1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2) \cdot 5}{(2x-1)(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{5}{(2x-1)(x+2)}}}$ ved kjerneregelen og brøkregelen. Vi kan også skrive $f(x) = \ln(2x-1) - \ln(x+2)$, som gir $f'(x) = \underline{\underline{\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+2}}}$.

f) Vi finner den deriverte til punkter på sirkelen $x^2 + y^2 = 25$ ved implisitt derivasjon, og får

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -2x/2y = -x/y$$

Punktene med $x = 3$ har $y^2 = 25 - 3^2 = 16$, dvs. $y = \pm 4$. Tangenten i punktet $(3, 4)$ blir

$$y - 4 = -3/4(x-3) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -3/4\,x + 25/4}}$$

og tangenten i punktet $(3, -4)$ blir

$$y + 4 = 3/4(x-3) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = 3/4\,x - 25/4}}$$

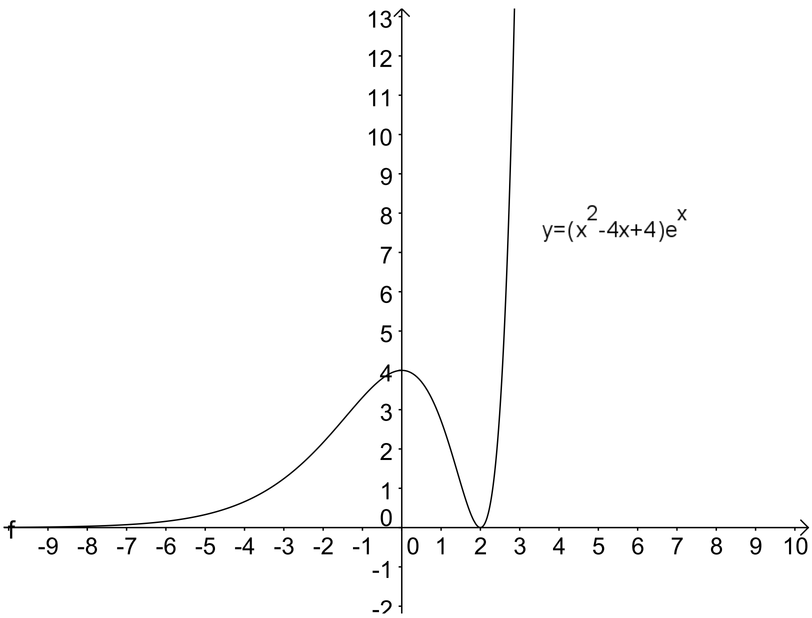
Oppgave 2

a) Nullpunktene er gitt ved $f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x = 0$, som gir $x^2 - 4x + 4 = 0$, og dermed er $\underline{\underline{x = 2}}$ eneste nullpunkt.

b) Vi har at $f'(x) = (2x-4)e^x + (x^2 - 4x + 4)e^x = (x^2 - 2x)e^x = \underline{\underline{x(x-2)e^x}}$ ved produktregelen.

c) Fortegnsskjema for f' viser at $x = 0$ gir $\underline{\underline{\text{et lokalt toppunkt i } (0,4)}}$ og at $x = 2$ gir $\underline{\underline{\text{et lokalt bunnpunkt i } (2,0)}}$.

d) Vi har at $f''(x) = (2x-2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = \underline{\underline{(x^2-2)e^x}}$. Vi ser at $f''(x)$ skifter fortegn i $x = \pm\sqrt{2}$, og dermed er x-koordinatene til vendepunktene for f gitt ved $\underline{\underline{x = \pm\sqrt{2}}}$. Se egen skisse av grafen nedenfor.



Oppgave 3

a) Vi ser at koordinatene til $A = \underline{\underline{(4,0,0)}}$, og siden $\angle AOB = 60°$ and $OB = 4$, så er koordinatene til $B = (4\cos(60°), 4\sin(60°), 0) = \underline{\underline{(2, 2\sqrt{3}, 0)}}$. Koordinatene til $C = (0, y, z)$, der $y, z \geq 0$. Siden $\angle BOC = 60°$, har vi at

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB \cdot OC \cdot \cos(60°)$$

det vil si at

$$(2, 2\sqrt{3}, 0) \cdot (0, y, z) = 8 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{3}y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 4/\sqrt{3} = 4\sqrt{1/3}$$

Siden $OC = 4$, får vi at $y^2 + z^2 = 16$, og dermed at $z^2 = 16 - 16/3 = 32/3$. Dette gir $z = \sqrt{32/3} = 4\sqrt{2/3}$, og dermed er koordinatene til $C = \underline{\underline{(0, 4\sqrt{1/3}, 4\sqrt{2/3})}}$.

b) Den trekantede pyramiden $OABC$ har grunnflate $G = (4 \cdot 4 \cdot \sin(60°))/2 = 4\sqrt{3}$, og høyde $h = z_C = 4\sqrt{2/3}$. Dermed blir volumet gitt ved

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{(4\sqrt{3})(4\sqrt{2/3})}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3}\sqrt{2}}}$$

Oppgave 4

a) Vi har at $PQ^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos v = 2a^2(1 - \cos v)$ ved cosinus-setningen, og dette gir $PQ = \underline{\underline{a\sqrt{2 - 2\cos v}}}$.

b) Arealet A av anlegget er gitt ved $A = (a^2 \sin v)/2 + (\pi(PQ/2)^2)/2 = a^2/4 \cdot (2\sin v + \pi(1 - \cos v))$. Dette gir

$$\underline{\underline{A = \frac{a^2}{4}(2\sin v - \pi\cos v + \pi)}}$$

c) Vi har at $A'(v) = a^2/4 \cdot (2\cos v + \pi \sin v)$, og dermed får vi at

$$A'(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos v + \pi \sin v = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan v = -2/\pi$$

Siden $v \in (0°, 180°)$, gir dette $v = \arctan(-2/\pi) + 180° \cong 147.5°$. Fortegnsskjema for $A'(v)$ forteller oss at $\underline{\underline{v \cong 147.5°}}$ gir størst mulig areal siden $A(v)$ har et (lokalt og globalt) toppunkt for denne vinkelen. Når $a = 22\text{m}$, får vi dermed største areal $A \cong \underline{\underline{831\text{m}^2}}$ ved innsetting.

Oppgave 5

a) $\int (12x^3 + 4e^x - 7)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{3x^4 + 4e^x - 7x + \mathcal{C}}}$

b) $\int (1/x^2 + 2/x + 3/\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{-1/x + 2\ln|x| + 6\sqrt{x} + \mathcal{C}}}$

c) Får å løse integralet $\int \frac{x^2-5x+1}{x^2-5x-6}\,\mathrm{d}x$ bruker vi først polynomdivisjon, og dette gir

$$\frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 5x - 6} = 1 + \frac{7}{x^2 - 5x - 6}$$

Deretter bruker vi delbrøksoppspaltning på restleddet, som gir

$$\frac{7}{x^2 - 5x - 6} = \frac{A}{x - 6} + \frac{B}{x + 1}$$

siden $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$. Dette gir $7 = A(x + 1) + B(x - 6)$, og innsetting av $x = 6$ og $x = -1$ gir $A = 1$ og $B = -1$. Dermed får vi

$$\int \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 5x - 6}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{x + \ln|x - 6| - \ln|x + 1| + \mathcal{C}}}$$

d) $\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \int 1/2 \cdot \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{-1/4\cos(2x) + \mathcal{C}}}$. Vi kunne alternativt ha brukt substitusjonen $u = \sin x$, som gir $\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \underline{\underline{1/2\,\sin^2 x + \mathcal{C}}}$, substitusjonen $u = \cos x$, eller delvis integrasjon (to ganger).

e) Separasjon av differensial-likningen $y' \cdot (\sin x + 1) = y \cdot \cos x$ gir

$$\frac{1}{y} y' = \frac{\cos x}{\sin x + 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \frac{\cos x}{\sin x + 1} \, \mathrm{d}x$$

Integrasjon gir dermed $\ln |y| = \ln |\sin x + 1| + C_1$, hvor vi har brukt substitusjonen $u = \sin x + 1$ for å løse integralet på høyre side. Vi løser denne likningen for y, og får den generelle løsningen

$$|y| = e^{C_1} |\sin x + 1| \quad \Rightarrow \quad y = C(\sin x + 1)$$

(hvor $C = \pm e^{C_1}$). Vi setter inn $x = 0$ og $y = 1/2$ fra startbetingelsen $y(0) = 1/2$, og får dermed $1/2 = C(\sin 0 + 1)$, og $C = 1/2$. Dermed får vi løsningen

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\sin x + 1)}}$$

f) Vi løser likningen $\sin x + \cos x = 0, \ x \in [0, 3\pi/2]$, og får $\tan x = -1$ og dermed $x = 3\pi/4$ som eneste løsning. Vi ser at $y = \sin x + \cos x$ ligger over x-aksen for $x \in [0, 3\pi/4]$ og under x-aksen for $x \in [3\pi/4, 3\pi/2]$. Dermed blir arealet gitt ved

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{3\pi/4} (\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x - \int_{3\pi/4}^{3\pi/2} (\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x$$

Vi ser at $A_1 = [-\cos x + \sin x]_0^{3\pi/4} = \sqrt{2} + 1$, og ved en direkte utregning av $-A_2 = [-\cos x + \sin x]_{3\pi/4}^{3\pi/2} = -1 - \sqrt{2}$ eller ved å bruke symmetrien ser vi at $A_2 = A_1$. Dermed får vi at

$$A = A_1 + A_2 = 2A_1 = \underline{\underline{2 + 2\sqrt{2}}}$$

g) Vi ser at $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ ligger over x-aksen når $x \in [0, 1]$. Dermed blir arealet gitt ved $A = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \, \mathrm{d}x$. Vi bruker substitusjonen $u = x^2 + 1$ og får

$$A = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{u}} \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{u - 1}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$$

siden $u(0) = 1$ og $u(1) = 2$. Dette gir

$$A = \frac{1}{2} \int_1^2 (u^{1/2} - u^{-1/2}) \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} - 2u^{1/2} \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{2 - \sqrt{2}}{3}}}$$