Eksamen i	FO929A Matematikk
	Prøve-eksamen
Dato	25. mai 2009
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	5
Vedlegg	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $f(x) = 1/x^2 + 3 - 4x^3$ gir $f'(x) = \underline{\underline{-2/x^3 - 12x^2}}$

b) $f(x) = \frac{1}{(1+x^3)^5} = (1+x^3)^{-5}$ gir $f'(x) = -5(1+x^3)^{-6} \cdot 3x^2 = \underline{\underline{-\frac{15x^2}{(1+x^3)^6}}}$

c) $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x \cos x + 3 = 3$ gir $f'(x) = \underline{\underline{0}}$

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$ gir $f'(x) = \frac{1(x+1)-(x-1)1}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{(x+1)^2}}}$

e) $f(x) = \sin(e^x) + \ln(e^{2x}) = \sin(e^x) + 2x$ gir $f'(x) = \cos(e^x)e^x + 2 = \underline{\underline{e^x \cos(e^x) + 2}}$

f) Vi setter $y = f(x)$ og løser diff.likningen $y' = -1/3(y+1)$. Separasjon gir

$$y' = -1/3(y+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = -1/3\,\mathrm{d}x$$

og integrasjon gir dermed $\ln|y+1| = -x/3 + \mathcal{C}'$, eller $y + 1 = Ce^{-x/3}$ med $C = e^{C'}$. Dermed blir den generelle løsningen $y = Ce^{-x/3} - 1$. Vi setter inn $x = 0$ og $y = 1$ fra startbetingelsen $f(0) = 1$, og får $1 = C - 1$. Dermed er $C = 2$, og løsningen $y = f(x)$ blir $\underline{\underline{f(x) = 2e^{-x/3} - 1}}$

Oppgave 2

a) Funksjonen $f(x) = 1/x + x, x \neq 0$ har derivert

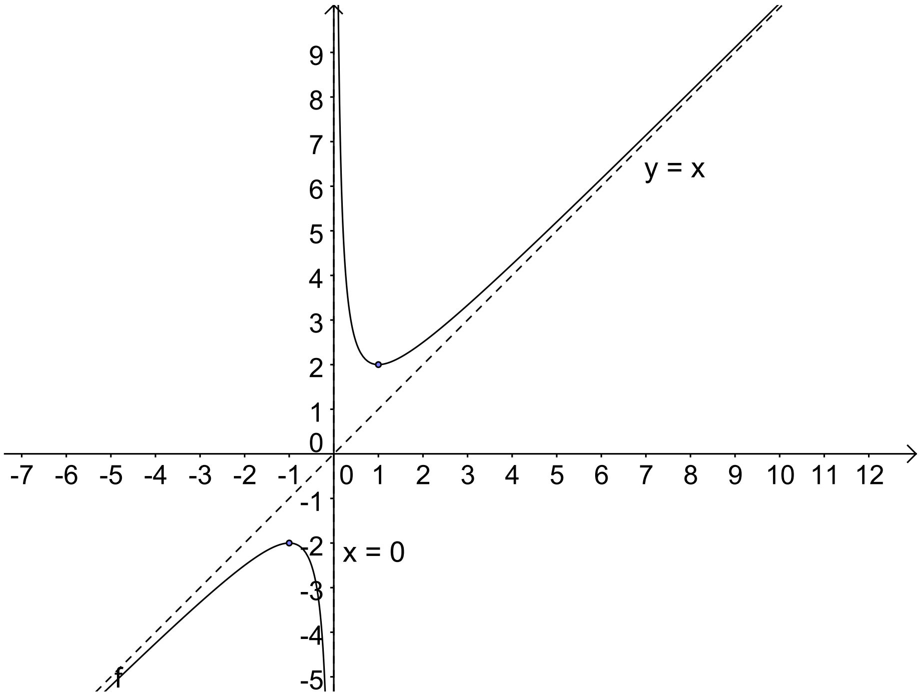
$$f'(x) = -1/x^2 + 1 = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

Fortegnsskjema for $f'(x)$ viser dermed at $x = -1$ gir et $\underline{\underline{\text{lokalt topp-punkt } (-1,-2)}}$ og $x = 1$ gir et $\underline{\underline{\text{lokalt bunnpunkt } (1,2)}}$.

b) Vi har $f''(x) = (-1/x^2+1)' = 2/x^3$. Fortegnsskjema for $f''(x)$ forteller oss dermed at f er konkav for $x < 0$ og konveks for $x > 0$. Siden funksjonen f ikke er definert for $x = 0$, har den $\underline{\underline{\text{ingen vendepunkt}}}$.

c) Siden $f(x) = 1/x + x = \frac{x^2+1}{x}$ har et nullpunkt i nevner for $x = 0$, mens teller ikke har nullpunkt i $x = 0$, så er $\underline{\underline{x = 0 \text{ en vertikal asymptote}}}$. Av formen $f(x) = 1/x+x$ ser vi at $\underline{\underline{y = x \text{ er en skrå asymptote}}}$, og at funksjonen ikke har horisontale asymptoter.

d) Se egen skisse av grafen til f nedenfor.



Figur 1: Grafen med asymptoter og topp/bunnpunkter

Oppgave 3

a) Grunnflaten $\triangle ABC$ er en likesidet trekant med side s, og har derfor areal $A = s^2 \sin(60°)/2 = \sqrt{3}\, s^2/4$. Overflaten til pyramiden blir derfor

$$O = 4A = \underline{\underline{\sqrt{3}\, s^2}}$$

b) Fra symmetrien i figuren ser vi at AP deler $\angle A$ i to like vinkler på $30°$. Dermed er $\triangle APB$ likebenet med $\angle BAP = \angle ABP = 30°$ og $AB = s$. Dette gir

$$\cos(30°) = \frac{s/2}{AP} \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{s/2}{\sqrt{3}/2} = \underline{\underline{s/\sqrt{3}}}$$

c) Siden $AT = s$, $AP = s/\sqrt{3}$ og $\angle APT = 90°$, får vi at $h = PT = \sqrt{s^2 - (s/\sqrt{3})^2} = s\sqrt{2/3}$, og dermed er volumet gitt ved

$$V = Ah/3 = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}\,s^2}{4} \cdot \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\,s^3}{12}}}$$

d) Vi har $\cos(\angle PAT) = AP/AT = 1/\sqrt{3}$. Dette gir at

$$\angle PAT = \underline{\underline{\arccos(1/\sqrt{3}) \cong 54.74°}}$$

Oppgave 4

a) Vi har at $\overrightarrow{PA} = [2\cos\omega - 4, 2\sin\omega - 2]$, og dermed er avstanden $d = |\overrightarrow{PA}|$ gitt ved $d^2 = (2\cos\omega - 4)^2 + (2\sin\omega - 2)^2 = 4\cos^2\omega - 16\cos\omega + 16 + 4\sin^2\omega - 8\sin\omega + 4 = 24 - 8\sin\omega - 16\cos\omega$ Dette gir

$$d = \sqrt{24 - 8\sin\omega - 16\cos\omega} = \underline{\underline{2\sqrt{6 - 2\sin\omega - 4\cos\omega}}}$$

b) Vi betrakter $d = d(\omega)$ som en funksjon av ω, med $0 \leq \omega < 2\pi$. Den deriverte blir dermed

$$d'(\omega) = 2\frac{-2\cos\omega + 4\sin\omega}{2\sqrt{6 - 2\sin\omega - 4\cos\omega}} = \frac{4\sin\omega - 2\cos\omega}{\sqrt{6 - 2\sin\omega - 4\cos\omega}}$$

Siden de andre faktorene er positive, trenger vi kun se på fortegnslinjen til $4\sin\omega - 2\cos\omega$. Vi har

$$4\sin\omega - 2\cos\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\tan\omega - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\omega = 1/2$$

Dette gir to nullpunkter med $0 \leq \omega < 2\pi$, gitt ved $\omega_1 = \arctan(1/2) \cong 0.4636$ eller $\omega_2 = \arctan(1/2) + \pi \cong 3.6052$. Vi ser fra fortegnslinjen at ω_1 gir et lokalt minimum for d mens ω_2 gir et lokalt maksimum for d. Dermed gir $\omega = \omega_2 = \underline{\underline{\arctan(1/2) + \pi \cong 3.6052}}$ størst avstand, og den største avstanden blir $d = d(\omega_2) = 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \cong \underline{\underline{6.472}}$.

Oppgave 5

a) $\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = 1/2[-\cos(2x)]_0^{\pi/2} = 1/2(-(-1) + 1) = \underline{\underline{1}}$

b) $\int_2^3 \ln(x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 (\ln|x+1| + \ln|x-1|)\,\mathrm{d}x = [(x+1)\ln(x+1) - (x+1) + (x-1)\ln(x-1) - (x-1)]_2^3 = (4\ln 4 - 4 + 2\ln 2 - 2) - (3\ln 3 - 3 + 1\ln 1 - 1) = \underline{\underline{10\ln 2 - 3\ln 3 - 2}}$

c) Vi løser $\int \frac{x}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x$ ved delbrøksoppspaltning. Vi setter

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

siden $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Dette gir $x = A(x-2) + B(x+1)$, og innsetting av $x = -1$ og $x = 2$ gir $A = 1/3$ og $B = 2/3$. Dermed får vi

$$\int \frac{x}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{1/3\ln|x+1| + 2/3\ln|x-2| + \mathcal{C}}}$$

d) Vi løser $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ved substitusjonen $u = 1 + \sqrt{x}$ som gir $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ og dermed

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u} \cdot 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u = 2\int (1 - 1/u)\,\mathrm{d}u$$

siden $u - 1 = \sqrt{x}$. Dermed får vi

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2u - 2\ln|u| + \mathcal{C} = \underline{\underline{2 + 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + \mathcal{C}}}$$

e) Vi har at volumet av rotasjonslegemet er gitt ved integralet

$$V = \int_0^3 \pi(\sqrt{x}\,e^x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^3 xe^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Vi løser dette integralet ved delvis integrasjon, og får

$$V = \pi(\big[x \cdot \frac{e^{2x}}{2}\big]_0^3 - \frac{1}{4}\big[e^{2x}\big]_0^3) = \frac{3}{2}e^6\pi - \frac{1}{4}(e^6 - 1)\pi = \underline{\underline{\frac{(5e^6+1)\pi}{4}}}$$

f) Skjæringspunktene er gitt av likningen $\sin x = \cos x$ for $x \in [0, 2\pi]$, og dette gir $\tan x = 1$, dvs $x = \pi/4$ og $x = 5\pi/4$. Når $x \in [\pi/4, 5\pi/4]$, så er $\sin x \geq \cos x$, og arealet i dette intervallet er gitt ved

$$A_1 = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x - \sin x\big]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

For $x \in [0, \pi/4]$ og $x \in [5\pi/4, 2\pi]$ har vi $\cos x \geq \sin x$, og arealet i disse intervallene kan vi beregne som

$$A_2 = \int_{-5\pi/4}^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = \big[\sin x + \cos x\big]_{-5\pi/4}^{\pi/4} = 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

siden $\sin x$ og $\cos x$ er periodiske med periode 2π. Dermed blir arealet

$$A = A_1 + A_2 = 2\frac{4}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$$