2.11.2011

Determinanter

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{definisjon}}{=} ad - bc$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Merk at: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ Bytter om: radene

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ søylene

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \overset{\text{def.}}{=} x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Merk fortegnet foran andre summand.

Vi husker gjerne dette som følger:

$$\begin{matrix} x_1 & \text{——} & \text{—} \; y_1 \; \text{—} & \text{——} & z_1 \end{matrix}$$

$$+ \left| \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \left| \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} z_2 \\ z_3 \end{matrix} \right| + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right|$$

Kryssproduktet kan uttrykkes som en determinant (på koordinatform)

$$[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right].$$

$\vec{\imath} = \vec{e}_1$ enhetsvektor i x-retning

$\vec{\jmath} = \vec{e}_2$ —— y ——

$\vec{k} = \vec{e}_3$ —— z ——

En alternativ "huskeregel" for å regne ut determinanten er følgende.

skriv opp 5 søyler hvor 1. og 2. søyle brukes til 4. og 5. søyle :

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{array}$$

Gang sammen de tre tallene som ligger på hver av de skrå linjene.

Legg sammen produktet fra linjene som skrår nedover mot høyre og trekk fra produktet fra linjene som skrår nedover mot venstre (stiplede linjer).

Dette gir 3×3 determinanten $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Vi forsikrer oss om at dette er riktig :

$$x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3$$

$$- x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3 - z_1 y_2 x_3$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

(bytter rekkefølge)

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Dette er determinanten.

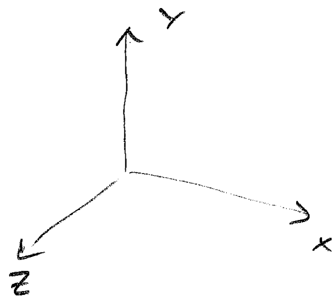
Det kan virke rart med fortegnet som innføres i koordinatpresentasjonen av kryssproduktet.

Hvis vi godtar det faktum at kryssproduktet er lineært kan vi forklare hvorfor vi får fortegnet

(Lineært: $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{b} = \vec{a}_1\times\vec{b} + \vec{a}_2\times\vec{b}$).

$\vec{i} = [1,0,0]$, $\quad \vec{j} = [0,1,0]$, $\quad \vec{k} = [0,0,1]$

Definisjon av kryssproduktet gir at



$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} = -\vec{j}\times\vec{i} \qquad \vec{i}\times\vec{i} = 0$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} = -\vec{k}\times\vec{j} \qquad \vec{j}\times\vec{j} = 0$

$\underline{\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}} = -\vec{k}\times\vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{k} = 0$

(Det er her fortegnet kommer inn.)

$$[X_1, Y_1, Z_1]\times[X_2, Y_2, Z_2] = (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k})\times(X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k})$$

$$= X_1Y_2\,\vec{i}\times\vec{j} + X_1Z_2\,\vec{i}\times\vec{k} + Y_1X_2\,\vec{j}\times\vec{i} + Y_1Z_2\,\vec{j}\times\vec{k} + Z_1X_2\,\vec{k}\times\vec{i} + Z_1Y_2\,\vec{k}\times\vec{j}$$

$$= X_1Y_2\,\vec{k} + X_1Z_2(-\vec{j}) + Y_1X_2(-\vec{k}) + (Y_1Z_2)\vec{i} + Z_1X_2\vec{j} + Z_1Y_2(-\vec{i})$$

$$= (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\vec{i} + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\vec{j} + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$