18.10.2011

1

13.1 og 13.2 Absoluttverdi til vektorer

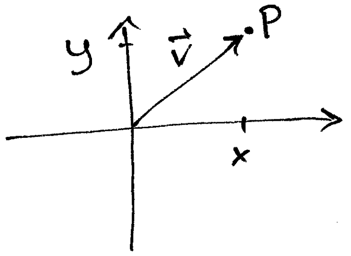
$\vec{v}$ vektor

$|\vec{v}|$ absoluttverdien til $\vec{v}$

kalles også normen, størrelsen, lengden til $\vec{v}$.

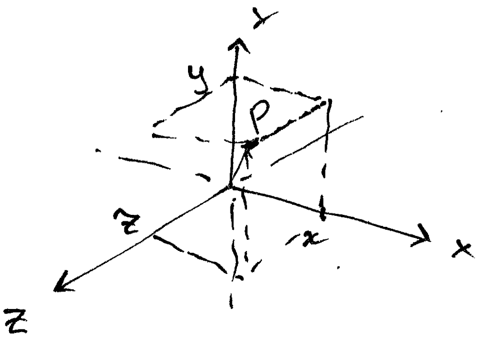
Av og til brukes notasjonen $\|\vec{v}\|$ for normen til $\vec{v}$.
$(\|\vec{v}\| = |\vec{v}|)$

For en vektor $\vec{v}$ i et koordinatsystem er $|\vec{v}|$ lengden til vektoren



$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ $P = (x, y)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ $P = (x, y, z)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

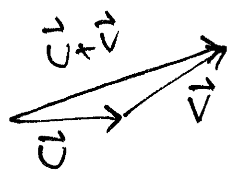
Egenskaper til en norm

1) $|\vec{v}| \geq 0$ for alle $\vec{v}$

2) $|\vec{v}| = 0$ hvis og bare hvis $\vec{v} = 0$.

3) $|t \cdot \vec{v}| = |t|\,|\vec{v}|$ for en skalar t.

4) (Trekantulikheten)
$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$



② Eksempel $\qquad \vec{v} = [3,4] \qquad \vec{u} = [1,2]$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \underline{5}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \sim 2.236\ldots$$

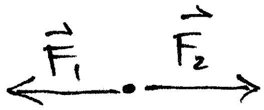
$$\vec{u}+\vec{v} = [4,6] = 2[2,3].$$

$$|\vec{u}+\vec{v}| = |2[2,3]| = 2|[2,3]|$$

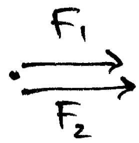
$$= 2\sqrt{2^2+3^2} = 2\sqrt{13} = 7.211$$

$$|\vec{u}|+|\vec{v}| = \underline{7.236}$$

To krefter $\vec{F_1}$ og $\vec{F_2}$ med norm $1N$ virker på et legeme. Hva er totalkraften $\vec{F}$ som virker på legemet?

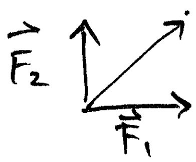


$$\vec{F} = \vec{F_1}+\vec{F_2} = \vec{0}N$$



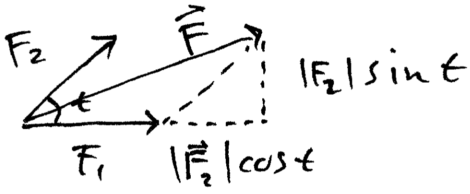
$$\vec{F} = \vec{F_1}+\vec{F_2}$$

$$|\vec{F}| = 2N.$$



størrelsen til totalkraften er $\sqrt{2}N$.

Anta vinkelen mellom $\vec{F_1}$ og $\vec{F_2}$ er t grader.
Hva er absoluttverdien til totalkraften $\vec{F} = \vec{F_1}+\vec{F_2}$?



$$|\vec{F}| = \sqrt{(1+\cos t)^2 + (\sin t)^2}\ N$$

$$= \sqrt{1+2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\ N$$

$$= \underline{\sqrt{2(1+\cos t)}\ N}$$

(3) Avstanden mellom to punkt

$P = [X_1, Y_1, Z_1]$ og $Q = [X_2, Y_2, Z_2]$

er $|\vec{PQ}| = \sqrt{(X_2-X_1)^2 + (Y_2-Y_1)^2 + (Z_2-Z_1)^2}$.

En sirkel med radius $r > 0$ og senter i (a, b) er gitt ved

$$\underline{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Dvs. sirkelen består av alle punkt (x,y) som tilfredsstiller likningen ovenfor.

Avstanden mellom $P = (x,y)$ og $S = (a, b)$

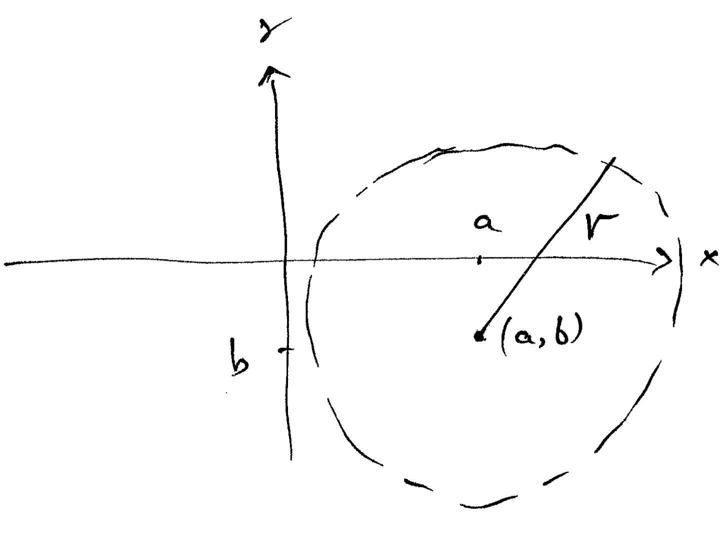
er $|\vec{SP}| = |[x-a, y-b]|$

$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

Alle punkt P med avstand r fra senteret S

er gitt $r = |\vec{SP}| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

dv.s $\underline{r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2}$.



(4) Hva er radius og senteret til sirkelen

$$x^2 + 2x + y^2 - y - 2 = 0 \quad ?$$

Fullfører kvadratene

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$

$$y^2 - y = \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

Setter dette inn i likningen:

$$(x+1)^2 - 1 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 2 + 1 + \tfrac{1}{4} = 3 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{13}{4}$$

Så senteret er $\underline{\underline{\left(-1, \tfrac{1}{2}\right)}}$ og radius er

$$r = \sqrt{\tfrac{13}{4}} = \underline{\underline{\tfrac{\sqrt{13}}{2}}}$$

(SFÆREN) (kan også kalles kule)

Sfæren med senter $S = (a, b, c)$ og radius r består av alle punkt $P = (x, y, z)$ med avstand r fra senteret S.

Sfæren består av alle punkt (x, y, z) som tilfredsstiller likning

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$\vec{SP} = [x-a, y-b, z-c]$$

$$|\vec{SP}| = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

⑤ Finn lengden til sidene i trekanten ABC

$A = (1, -1, 2) \qquad B = (0, 3, 4)$

$\vec{AC} = [2, 3, 4].$

$|\vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29} = 5.38\ldots$

$\vec{AB} = [-1, 3-(-1), 2] = [-1, 4, 2]$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21} \sim 4.58\ldots$

$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$

$= \underbrace{[2, 3, 4]}_{\vec{AC}} + \underbrace{[1, -4, -2]}_{-\vec{AB}}$

$= [3, -1, 2]$

$|\vec{BC}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \sim 3.74.$

Lengden på linjestykke fra A til B er : 4.58...

A til C er : 5.38..

— " — B til C er : 3.74...

6

Dekomponering av vektorer (13.3)

La $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer i planet som ikkje er parallelle.

En hver vektor $\vec{v}$ er lik

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$ for ~~skalarer~~ x og y.

x og y er entydig bestemt av $\vec{v}$.

$\vec{v}$ er dekomponert til komponentene

$x \cdot \vec{a}$ og $y \cdot \vec{b}$.

Eksempel $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$

$$\vec{v} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$$

$$= [x, y]$$

koordinat presentasjon av vektorer med enhetsvektorene i x og i y-retning.

7

Repetisjon om fullstendige kvadrat.

Et fullstendig kvadrat er på formen $(x+d)^2$.

Siden $(x+d)^2 = x^2+2dx+d^2$ er x^2+bx+c et fullstendig kvadrat hvis og bare hvis $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$. $\left(d = \frac{b}{2}\right)$.

For alle b og c finnes det d og e slik at:

$$x^2+bx+c = (x+d)^2 + e$$

$$x^2+bx+c = x+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Denne omskriving kalles gjerne <u>fullføring av kvadratet.</u>

$(a \neq 0)$

Mer generelt $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

For $a \neq 0$ er derfor $ax^2+bx+c=0$ hvis og bare hvis

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Dette gir "abc-formelen"

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$