20.10.2011

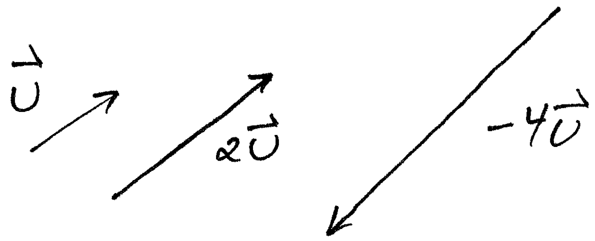
13.3, 4 og 5 Parallelle vektorer

1

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle hvis

1) minst en av dem er $\vec{0}$-vektoren eller

2) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har samme eller motsatt retning.



er parallelle vektorer

Hvis $\vec{u} \neq \vec{0}$, da er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle hvis og bare hvis det finnes en skalar t slik at $t \cdot \vec{u} = \vec{v}$.

eks. Hvilke av vektorene $\vec{a} = [2, 3]$, $\vec{b} = [4, 5]$ og $\vec{c} = [-10, -15]$ er parallelle

$\vec{a}$, $\vec{b}$:

$t\,[2, 3] = [4, 5]$

$2 \cdot t = 4$ og $3 \cdot t = 5$

$t = 2$ $\quad$ $t = 5/3$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke parallelle.

$\vec{a}$, $\vec{c}$:

$t\,[2, 3] = [-10, -15]$

$t = -5$ er en løsning.

$-5\vec{a} = \vec{b}$

$\vec{a}$ og $\vec{c}$ er parallelle.

$\vec{b}$ og $\vec{c}$ er ikkje parallelle siden $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikkje parallelle og $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er parallelle.

② Anta $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikkje er parallelle.

Når er $\vec{u} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$ og $\vec{v} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$ parallelle?

1) Hvis $\vec{u} = \vec{0}$ $(x_1 = 0 = y_1)$ eller $\vec{v} = \vec{0}$ $(x_2 = 0 = y_2)$

eller

2) Hvis det finnes en t slik at

$$t \cdot x_1 = x_2$$
$$t \cdot y_1 = y_2 .$$

(Anta $\vec{u} \neq 0$
$$t \cdot \vec{u} = \vec{v}$$
$$t x_1 \vec{a} + t y_1 \vec{b} = x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b}$$
$$(t x_1 - x_2)\vec{a} + (t y_1 - y_2)\vec{b} = 0.$$

siden $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikkje er parallelle har dette løsning hvis og bare hvis
$$t x_1 = x_2$$
$$t y_1 = y_2 .$$
)

Eks $\vec{a}, \vec{b}$ ikkje parallelle.

Er $\vec{u} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$ og $\vec{v} = 6\vec{a} + 2\vec{b}$ parallelle?

$$3t = 6$$
$$(-5)t = 2$$
har ingen løsning og derfor er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ikkje parallelle.

③ Hvilke av vektorene

$\vec{a} = [3,-2,4]$, $\vec{b} = [-21,14,-28]$ og $\vec{c} = [1,0,-3]$

er parallelle?

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle siden $-7\vec{a} = \vec{b}$.

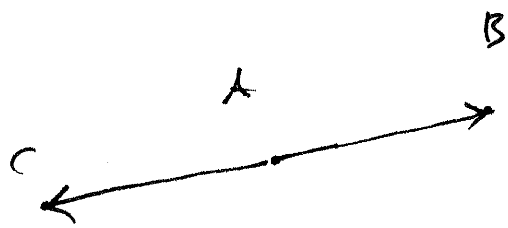
$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikkje parallelle med $\vec{c}$.

Ligger punktene $A = (1,2,3)$

$B = (2,1,5)$

og $C = (-2,5,-3)$

på en linje ?



Punktene ligger på en linje hvis og bare hvis $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ er parallelle.

$\vec{AB} = [1,-1,2]$

$\vec{AC} = [-3,3,-6]$

$-3\,\vec{AB} = \vec{AC}$

A, B og C ligger på en linje.

(4) Eksempel

Bestem s og t (reelle tall) slik at $\vec{u} = [s, 1, st]$ og $\vec{v} = [s^2, t-1, t^2]$

$\vec{u} \neq 0$ for alle s og t.

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle hvis og bare hvis det finnes en skalar k slik at

$$k \cdot \vec{u} = \vec{v}.$$

$$k\vec{u} = [ks, k, kst] = [s^2, t-1, t^2] = \vec{v}$$

$$k \cdot s = s^2$$
$$k = t-1$$
$$k \cdot s \cdot t = t^2.$$

$s = 0$: da må $t = 0$ vektorene er da lik $[0, 1, 0]$ og $[0, -1, 0]$.

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle når $s = 0$, $t = 0$.

$s \neq 0$ $k = s$ og derfor er $s = t-1$

$$s \cdot s \cdot t = t^2$$

$t = 0$ eller at $s^2 = t$.

Når $t = 0$, $s = -1$ $\vec{u}$ er da $[-1, 1, 0]$

$\vec{v}$ er da $[1, -1, 0]$

og $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

$t \neq 0$ $s^2 = t$ og $s = t-1$

$$s = s^2 - 1$$
$$s^2 - s - 1 = 0$$ løsningene er $s = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

(5) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle vektorer når

1) $s = t = 0$

2) $t = 0$ og $s = -1$

3) $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

4) $s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

13.6 Determinanter

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = \underline{-2}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5 - 2\cdot 3 = -5 - 6 = \underline{-11}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - (-1)\cdot 5 = 6 + 5 = \underline{11}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 2\cdot 4 = 0$$

$n \times m$-matrise

$n\cdot m$ tall.

n rader

og m søyler.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

RADER

SØYLE

Determinanter er definert for $n\times n$-matriser.

$$\left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

6 $\vec{u} = [x_1\ y_1]$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = [x_2\ y_2]$

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

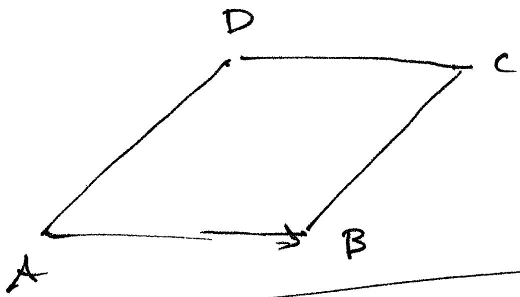
Noen regneregler for determinanter: (2×2)

$$\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u} \\ t\cdot\vec{v} \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u}+\vec{w} \\ \vec{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{w} \\ \vec{v} \end{vmatrix} \quad \ldots$$

Resultat:

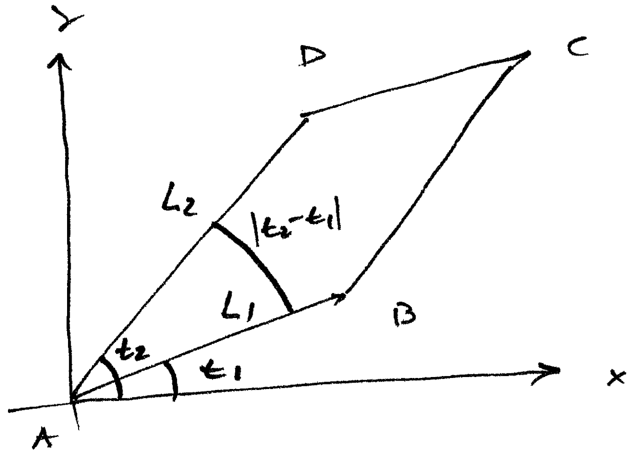


(i planet)

$$\boxed{\text{Arealet til parallellogrammet } ABCD \text{ er absoluttverdien til } \begin{vmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AD} \end{vmatrix}.}$$

Bevis

7



Arealet til parallellogrammet ABCD er $\underline{L_1 \cdot L_2 \, |\sin(t_2-t_1)|}$

$L_1 = |\overrightarrow{AB}|$

$L_2 = |\overrightarrow{AD}|$

$\overrightarrow{AB} = [L_1 \cdot \cos t_1, \; L_1 \cdot \sin t_1]$

$\overrightarrow{AD} = [L_2 \cos t_2, \; L_2 \cdot \sin t_2]$

Regner determinanten

$$\left| \begin{matrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AD} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} L_1 \cos t_1, & L_1 \sin t_1 \\ L_2 \cos t_2, & L_2 \sin t_2 \end{matrix} \right|$$

$$= L_1 L_2 \left(\cos t_1 \sin t_2 - \cos t_2 \sin t_1 \right)$$

Minner om addisjonsformelen for sin

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \sin y + \cos y \cdot \sin x .$$

Derfor er

$$\left| \begin{matrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AD} \end{matrix} \right| = L_1 L_2 \sin(t_2 - t_1)$$

(Detaljer : $\sin(t_2-t_1) = \cos t_2 \cdot \underbrace{\sin(-t_1)}_{-\sin(t_1)} + \underbrace{\cos(-t_1)}_{\cos t_1} \cdot \sin t_2$

$= \cos t_1 \cdot \sin t_2 - \cos t_2 \cdot \sin t_1$)

Derfor er $\left| \left| \begin{matrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AD} \end{matrix} \right| \right|$ = arealet til parallellogrammet ABCD.

8

Eks. Finn arealet til parallellogrammet

$A = (1, 2)$ $B = (3, 4)$ og

$D = (2, -1)$.

$\vec{AB} = [2, 2]$

$\vec{AD} = [1, -3]$

$$\text{Arealet} = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right| = \left| 2(-3) - 2 \cdot 1 \right|$$

$$= \left| -6 - 2 \right| = \left| -8 \right| = \underline{\underline{8}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Vektorene } \vec{a} = [x_1, y_1] \text{ og } \vec{b} = [x_2, y_2] \\ \text{er parallelle hvis og bare hvis} \\ \left| \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \right| = 0. \end{array}}$$