31.10 14.5 Vektorprodukt

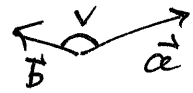
(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ tar inn to vektorer (i rommet) og gir en vektor (i rommet)

(leses "a kryss b")

Vektorproduktet kalles også kryssproduktet.

Definisjon av vektorprodukt

* $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin v$

  hvor v er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ 

  $(0 \leq v \leq 180°)$

* $\vec{a} \times \vec{b}$ er vinkelrett på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$

* Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle $(|\vec{a} \times \vec{b}| \neq 0)$,

  da er $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ et høyrehandsystem.

Noen egenskaper til vektorproduktet.

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{(antikommutativitet)}$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b} \quad \text{(ikke opplagt)}$$

$$(t\vec{a}) \times \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b})$$

Tilsvarende er skalarproduktet lineært i andre faktor.

Enhetsvektorene i x-retning $\vec{e}_1 = \vec{i}\ (i, i)$

y-retning $\vec{e}_2 = \vec{j}$

z-retning $\vec{e}_3 = \vec{k}$

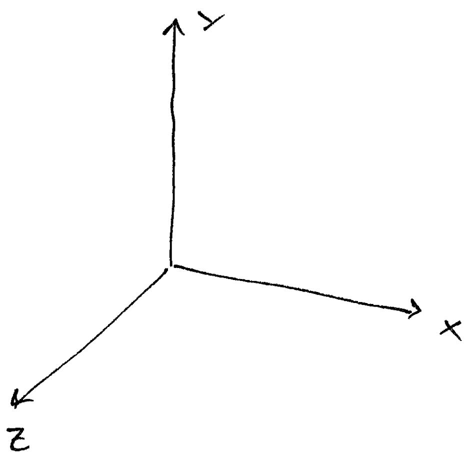
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i} \quad (\text{eller } \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k})$$

(2)

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} = -\vec{k}\times\vec{j}$

$\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$



[Digresjon: et produkt $\square$ er
kommutativt hvis $a \square b = b \square a$.
Hvis produktet $\square$ gir et objekt av samme type som deltar, kan vi gjenta operasjon:

$$(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$$ kalles assosiativitet.]

Kryssproduktet er ikkje assosiativt:

$$\vec{j}\times(\vec{j}\times\vec{k}) = \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$$

men $(\vec{j}\times\vec{j})\times\vec{k} = \vec{0}\times\vec{k} = \vec{0}$

Til orientering.

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ er utspent av $\vec{b}$ og $\vec{c}$ (siden den er vinkelrett på $\vec{b}\times\vec{c}$).

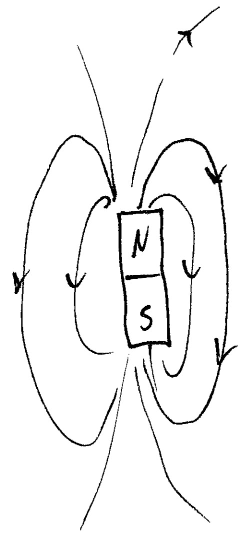
Faktum: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

skalarprodukt

Eksempel fra fysikk

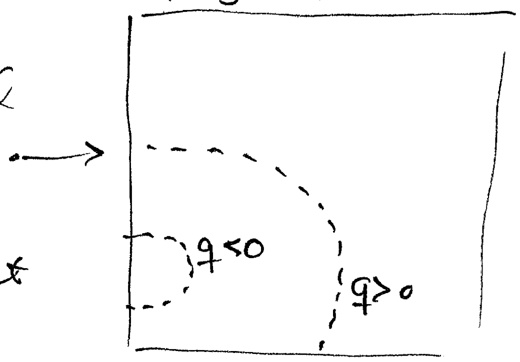
(3) En elektrisk partikkel med ladning q og hastighetsvektor $\vec{V}$ i et magnetisk felt $\vec{B}$ utsettes for kraften

$$\vec{F} = q\,\vec{V} \times \vec{B}$$



Homogent Magnetfelt retta ut av planet

En elektrisk ladd partikkel



beveger seg i sirkelsegment i feltet.

Et magnetfelt utfører ikke et arbeid på en ladd partikkel.

(Se link på hjemmesiden for mer informasjon)

Koordinatform til kryssproduktet

Spesialtilfelle.

$\vec{a} = [x_1, y_1, 0]$ og $\vec{b} = [x_2, y_2, 0]$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left[0, 0, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right]$$

fra tidligere. 20. oktober.

3×3 - determinanter

4

$$+ \div +$$

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

$$= x_{11} \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - x_{12} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{13} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}$$

fortegnet er lett å glemme!

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3 - 5 \cdot 3) - 2(4 - 5 \cdot 7) + 0$$

$$= -12 - 2(-31)$$

$$= -12 + 62 = \underline{50}$$

Hvis $\vec{a} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{b} = [x_2, y_2, z_2]$

da er

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Finn vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ hvor

5 $\vec{a} = [1, 2, 0]$ og $\vec{b} = [3, 5, 7]$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \cdot 14 - \vec{j} \cdot 7 + \vec{k}(5 - 6)$$

$$= 14\vec{i} - 7\vec{j} - 1\vec{k}$$

$$= \underline{[14, -7, -1]}.$$

Merk at $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ og $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$.

Hva er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{5}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{83}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 2 \cdot 5 = 13$ prikkproduktet.

$$\cos V = \frac{13}{\sqrt{5}\sqrt{83}} \sim 0.6381$$

$$V = 50.34^\circ.$$

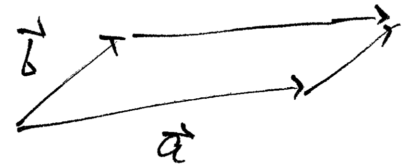
(Alternativt kan vi benytte at

$$\sin V = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Dette bestemmer ikke vinkelen entydig og vi må avgjøre hvilke av løsningene (mellom 0 og 180°) som er den gyldige..)

6

Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$



er

$$\underline{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Arealet til parallellogrammet når $\vec{a} = [1, -3, 5]$ og $\vec{b} = [-1, 1, 3]$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [-14, -8, -2] = 2[-7, -4, -1].$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 2\sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + (-1)^2}$$

$$= 2\sqrt{49 + 16 + 1} = \underline{2\sqrt{66}}.$$