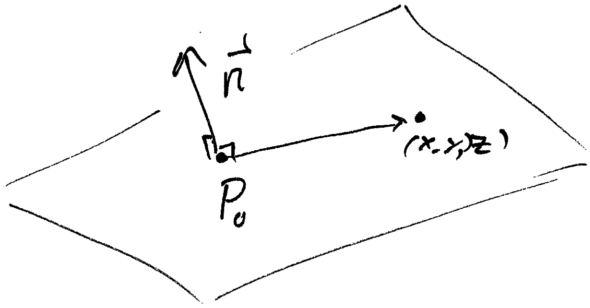
3.11.2011

14.7 og 14.8 Plan

(1) Ligning for et plan.

La $\vec{n} = [a, b, c]$ være en vektor

og P_0 være et punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$



Et punkt $P=(x,y,z)$ ligger i planet vinkelrett på $\vec{n}$, og inneholder P hvis og bare hvis vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ er vinkelrett på $\vec{n}$. :

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

$$[x-x_0, y-y_0, z-z_0] \cdot [a, b, c] = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Plan er gitt ved likninger på formen

$$ax + by + cz = d. \qquad ([a,b,c] \neq \vec{0})$$

En normal vektor er gitt ved $[a, b, c]$

eks * $x = 0$ beskriver yz planet

$(1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0)$ $\vec{n} = [1,0,0]$

(2)

* $y = 2$

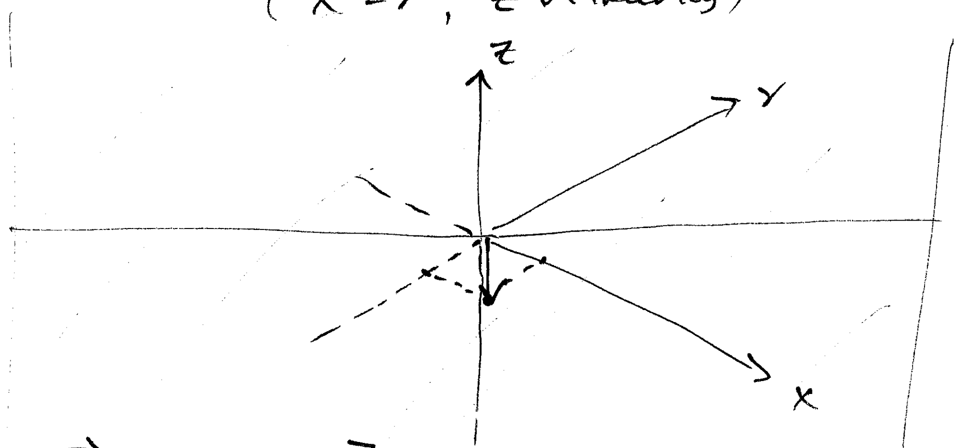
Er et plan som er parallelt til xz-planet.
(Forskyvd to enheter i positiv y-retning.

$\vec{n} = [0,1,0]$

$1 \cdot x + (-1) \cdot y + 0 \cdot z = 0$

* $x - y = 0$

($x = y$, z vilkårlig)



$\vec{n} = [1,-1,0]$
er en normalvektor

* Finn ligningen til planet som inneholder punktet $P = (1,-1,2)$ og er normalt på vektoren $\vec{n} = [2,3,5]$.

$[(x-1),\ y-(-1),\ z-2] \cdot \vec{n} = 0$

$= 2x + 3y + 5z = [1,-1,2] \cdot [2,3,5]$

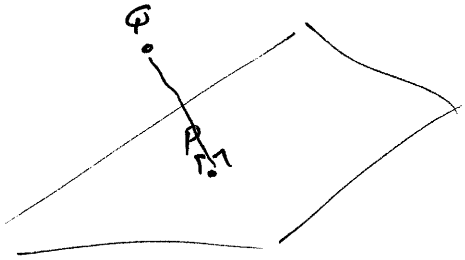
$= 2 - 3 + 10 = 9$

$\underline{2x + 3y + 5z = 9}$

* $P = (1, 2, 3)$ $\quad Q = (-1, 2, 4)$

Finn likningen til planet som inneholder P og som står vinkelrett på linja mellom P og Q.

3

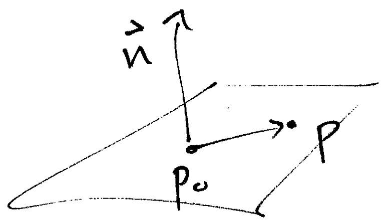


En normalvektor er $\vec{n} = \overrightarrow{QP} = [1-(-1),\ 2-2,\ 3-4]$
$= [2, 0, -1]$

$$\vec{n} \cdot [x, y, z] = \vec{n} \cdot \overbrace{[1, 2, 3]}^{\overrightarrow{OP}} = [2,0,-1] \cdot [1, 2, 3]$$

$$2x - z = 2 - 3 = -1$$

$$\underline{2x - z = -1}$$



$$\overrightarrow{P_0 P} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{n}$$

$OP = [x, y, z]$

$OP_0 = [x_0, y_0, z_0]$

Parametrisering av plan

P_0 et punkt

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke-parallelle vektor.

Planet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som inneholder punktet P_0 består av alle punkt $P=(x,y,z)$ slik at: $\overrightarrow{P_0P} = s\vec{a} + t\vec{b}$ for reelle tall (parametre) s og t.

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{P_0P}.$$

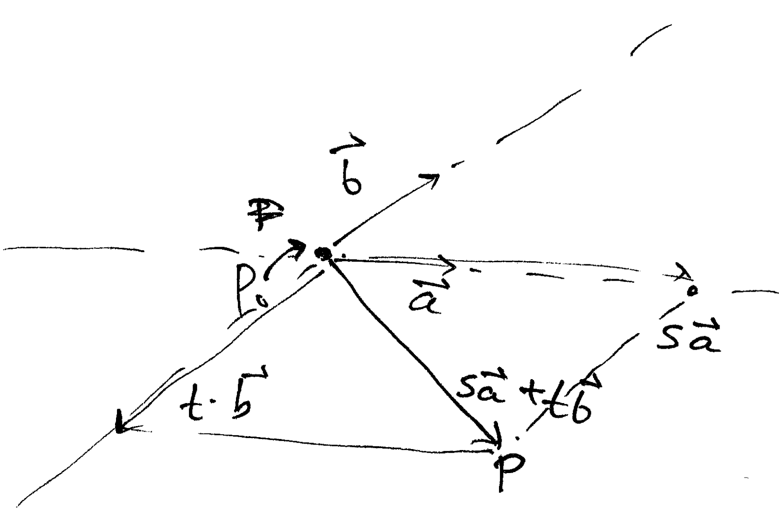
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + s\vec{a} + t\vec{b}$$

$$[x,y,z] = [x_0,y_0,z_0] + s[a_1,a_2,a_3] + t[b_1,b_2,b_3]$$

koordinatvis:

$$x = x_0 + s\cdot a_1 + t\cdot b_1$$
$$y = y_0 + s\cdot a_2 + t b_2$$
$$z = z_0 + s\cdot a_3 + t\cdot b_3$$

Parametrisering av et plan.



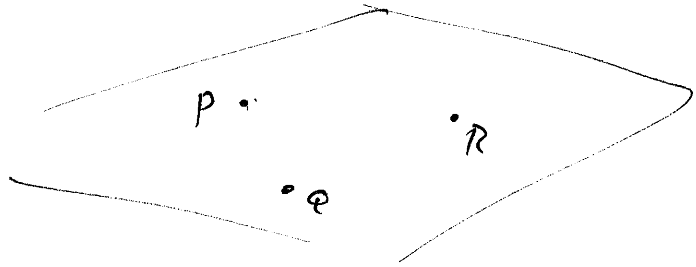
(5)

La $P = (1,-1,2)$

$Q = (2,3,-1)$

$R = (0,1,2)$

Beskriv planet som inneholder punktene



$$\vec{PQ} = [2-1,\ 3-(-1),\ -1-2] = [1,4,-3]$$

$$\vec{PR} = [0-1,\ 1-(-1),\ 2-2] = [-1,2,0]$$

En parametrisering av planet:

$$[x,y,z] = \vec{OP} + s\,\vec{PQ} + t\,\vec{PR} \qquad s,t \text{ reelle tall}$$

$$= [1,-1,2] + s[1,4,-3] + t[-1,2,0]$$

$x = 1 + s - t$

$y = -1 + 4 \cdot s + 2t$

$z = 2 - 3s$

Likningen til planet:

En normalvektor til planet er

$$\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = [1,4,-3] \times [-1,2,0]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-(-6)) - \vec{j}(0-3) + \vec{k}(2-(-4))$$

$$\vec{n} = [6,3,6] = 3[2,1,2]$$

Likningen for planet

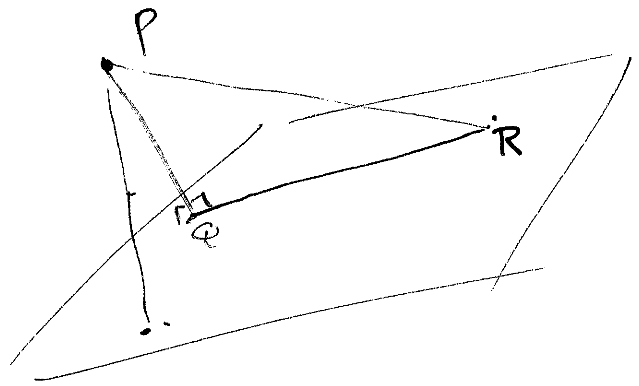
(6) $[x,y,z] \cdot \cancel{3}[2,1,2] = [1,-1,2] \cdot \cancel{3}[2,1,2]$

$$2x + y + 2z = 2 - 1 + 4 = 5$$

$$\underline{2x + y + 2z = 5}$$

Eks La $2x + y + 2z = 5$ være et plan.

Hva er korteste avstand fra planet til punktet $P\ (1,-1,3)$?



$\uparrow \vec{n} = [2,1,2]$ normalvektor

Avstanden fra P til Q i planet er minst når $\vec{PQ}$ er vinkelrett på planet.

$$\vec{RP} = \vec{RQ} + \vec{QP}$$

$$\vec{RP} \cdot \vec{n} = \vec{PQ} \cdot \vec{n} + \overbrace{\vec{QR} \cdot \vec{n}}^{0}$$

0 siden $\vec{QP}$ er i planet

$$\vec{PQ} \cdot \vec{n} = \pm |\vec{PQ}| \cdot |\vec{n}|$$

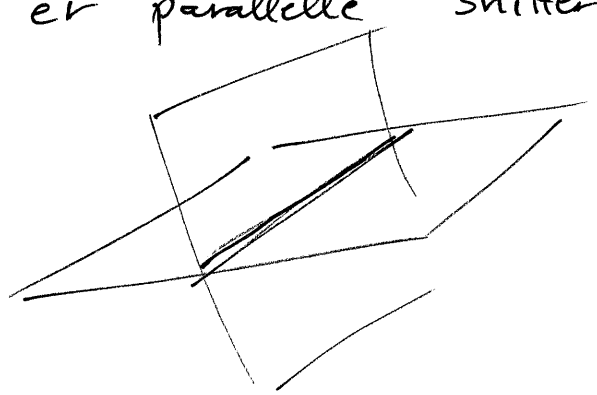
$\vec{PQ}$ og $\vec{n}$ er parallelle.

Så $|PQ| = \left| \vec{RP} \cdot \vec{n} / |\vec{n}| \right|$

$R = (0,1,2)$ ligger i planet. $\vec{RP} = [1,-2,1]$

Korteste avstand er $|PQ| = \left| \dfrac{[1,-2,1] \cdot [2,1,2]}{|[2,1,2]|} \right| = \dfrac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}$

7. To plan som ikkje er parallelle snitter i en linje.



Beskriv linja L som planene

$$2x + 3y - z = 2 \quad \text{og} \quad x - y + 2z = 4$$

Snitter i.

Normalvektorene til planene er henholdsvis

$$[2, 3, -1] \quad \text{og} \quad [1, -1, 2]$$

Linja L må vere vinkelrett på begge normalvektorene. Vi ser at $[-1, 1, 1]$ er en normalvektor.

(alternativt ta kryssproduktet av normalvektorene)

Vi trenger et punkt på L.

Prøver med $z = 0$:
$$2x + 3y = 2 \quad (\text{I})$$
$$x - y = 4 \quad (\text{II})$$

$\text{I} + 3(\text{II})$ gir
$$2x + 3x \; (+3y - 3y) = 2 + 12 = 14$$
$$x = 14/5$$

Dette gir $y = x - 4 = \frac{14}{5} - 4 = \frac{14}{5} - 20 = \frac{-6}{5}$

Punktet $(14/5, -6/5, 0)$ ligger på linja.

En parametrisering er:
$$x = \frac{14}{5} - t$$
$$y = \frac{-6}{5} + t$$
$$z = t$$

t reelt tall