FO929A – Oblig nr. 5

Oppgave 1
Bruker at $(k \cdot x^n)' = k \cdot n \cdot x^{n-1}$, og at $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.

a)

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = \underline{3x^2}$$

b)

$$f(x) = x^4 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4)' + (-2x)' + (1)' \\ &= 4x^3 + (-2) + 0 \\ &= 4x^3 - 2 \\ &= \underline{2(2x^3 - 1)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sqrt{x} - 7 \\ &= 4x^{1/2} - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \\ &= 2x^{-1/2} \\ &= \underline{\frac{2}{\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= 4/x^2 - 4\sqrt{x} + 3x - 9 \\ &= 4x^{-2} - 4\sqrt{x} + 3x - 9 \end{aligned}$$

Jeg har allerede funnet den deriverte til $4\sqrt{x}$. Den er $2/\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(-2)x^{-3} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 3 \\ &= \underline{-\frac{8}{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 3} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} - 7x^3 - x \\ &= x^{-1} - 7x^3 - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)x^{-2} - (21x^2) - 1 \\ &= -x^{-2} - 21x^2 - 1 \\ &= \underline{-21x^2 - \frac{1}{x^2} - 1} \end{aligned}$$

Oppgave 2
Bruker at $f''(x)$ er lik $(f'(x))'$ og at jeg allerede har funnet $f'(x)$ for alle funksjonene.

a)

$$f(x) = x^3 \ , \ f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = \underline{6x}$$

b)

$$f(x) = x^4 - 2x + 1 \ , \ f'(x) = 4x^3 - 2$$
$$f''(x) = \underline{12x^2}$$

c)

$$f(x) = 4\sqrt{x} - 7 \ , \ f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot (-\frac{1}{2})x^{-3/2} \\ &= -1x^{-3/2} \\ &= \underline{\frac{-1}{\sqrt{x^3}}} \end{aligned}$$

d)

$$f(x) = 4/x^2 - 4\sqrt{x} + 3x - 9 \ , \ f'(x) = -\frac{8}{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 3$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= ((-8)(-3)x^{-4}) - (-x^{-3/2}) \\
&= 24x^{-4} + x^{-3/2} \\
&= \underline{\frac{24}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}}
\end{aligned}
$$

e)

$$
f(x) = \frac{1}{x} - 7x^3 - x \ , \ f'(x) = -21x^2 - \frac{1}{x^2} - 1
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (-42x) - ((-2)x^{-3}) \\
&= -42x + 2x^{-3} \\
&= \underline{\frac{2}{x^3} - 42x}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

a)

$$
f(x) = x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{1/2} = x^{3/2}
$$

$$
\frac{d}{dx}f(x) = \frac{3}{2}x^{3/2-1} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \underline{\frac{3\sqrt{x}}{2}}
$$

Utnytter at $x\sqrt{x} = x^{3/2}$ i stedet for å bruke produktregelen.

b)

$$
f(x) = \sqrt{2x-1} = (2x-1)^{1/2}
$$

Bruker kjerneregelen med $2x - 1$ som kjerne.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d\sqrt{2x-1}}{d(2x-1)} \cdot \frac{d(2x-1)}{dx} \\
&= \frac{1}{2}(2x-1)^{-1/2} \cdot 2 \\
&= \underline{\frac{1}{\sqrt{2x-1}}}
\end{aligned}
$$

c)

$$
f(x) = \frac{2x-3}{x-2}
$$

Bruker kvotientregelen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{(\frac{d}{dx}(2x-3))(x-2)-(2x-3)(\frac{d}{dx}(x-2))}{(x-2)^2}\\
&= \frac{(2\cdot(x-2))-((2x-3)\cdot 1)}{(x-2)^2}\\
&= \frac{(2x-4)-(2x-3)}{(x-2)^2}\\
&= \frac{2x-4-2x+3}{(x-2)^2}\\
&= \underline{\frac{-1}{(x-2)^2}}
\end{aligned}$$

d)

$$f(x) = \frac{2x^2-4}{x^2+1}$$

Bruker kvotientregelen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{(\frac{d}{dx}(2x^2-4))(x^2+1)-(2x^2-4)(\frac{d}{dx}(x^2+1))}{(x^2+1)^2}\\
&= \frac{(4x(x^2+1))-((2x^2-4)2x)}{(x^2+1)^2}\\
&= \frac{4x^3+4x-4x^3+8x}{(x^2+1)^2}\\
&= \underline{\frac{12x}{(x^2+1)^2}}
\end{aligned}$$

e)

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - x\sqrt{x}$$

Bruker at $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$ og at den deriverte til $x\sqrt{x}$ er $\frac{3\sqrt{x}}{2}$.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^{1/3} - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{3}{2}x^{1/2} \\
&= \frac{1 \cdot 2}{3x^{2/3} \cdot 2} - \frac{3x^{1/2} \cdot 3x^{2/3}}{2 \cdot 3x^{2/3}} \\
&= \frac{2 - 9x^{7/6}}{6x^{2/3}} \\
&= \underline{\frac{2 - 9\sqrt[6]{x^7}}{6\sqrt[3]{x^2}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 4 & 5

a)

$$f(x) = x^2 \ , \ x = a = -1$$

Deriverer f først.

$$f'(x) = 2x$$

Tangenten og normalen går gjennom punktet $(a, f(a))$, altså:

$$(-1, (-1)^2) = (-1, 1)$$

Stigningstallet b til tangenten i $(a, f(a))$ blir da:

$$b = f'(a) = 2 \cdot (-1) = \underline{-2}$$

Bruker ettpunktsformelen for å finne ligningen for tangenten:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= b(x - x_1) \\
y - 1 &= -2(x - (-1)) \\
y &= -2(x + 1) + 1 \\
&= \underline{-2x - 1}
\end{aligned}
$$

Stigningstallet d til normalen i $(a, f(a))$ blir da:

$$d = -\frac{1}{f'(a)} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$$

Ettpunktsformelen gir normalen:

$$
\begin{aligned}
y &= d(x - x_1) + y_1 \\
&= \frac{1}{2}(x - (-1)) + 1 \\
&= \underline{\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

b)

$$f(x) = 2x^3 - 4x + 7\ ,\ x = a = 2$$

$$f'(x) = 6x^2 - 4$$

Tangenten og normalen går gjennom punktet $(a, f(a))$:

$$f(a) = f(2) = 2(2)^3 - 4(2) + 7 = 16 - 8 + 7 = 15$$

$\Rightarrow$ punktet er $(2, 15)$

Stigningstallet b til tangenten i $(a, f(a))$ er:

$$b = f'(a) = 6(2)^2 - 4 = 24 - 4 = 20$$

Tangenten er:

$$\begin{aligned} y &= b(x - x_1) + y_1 \\ &= 20(x-2) + 15 \\ &= \underline{20x - 25} \end{aligned}$$

Stigningstallet d til normalen i $(a, f(a))$ er:

$$d = -\frac{1}{f'(a)} = -\frac{1}{6(2)^2 - 4} = -\frac{1}{20}$$

Normalen er:

$$\begin{aligned} y &= d(x - x_1) + y_1 \\ &= -\frac{1}{20}(x-2) + 15 \\ &= -\frac{x}{20} + \frac{1}{10} + \frac{15 \cdot 10}{10} \\ &= \underline{\frac{-1}{20}x + \frac{151}{10}} \end{aligned}$$

c)

$$f(x) = \sqrt{x}\ ,\ x = a = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tangenten og normalen går gjennom punktet $(a, f(a))$:

$$f(a) = f(2) = \sqrt{4} = 2$$

$\Rightarrow$ punktet er $(4, 2)$

Stigningstallet b til tangenten i $(a, f(a))$ er:

$$b = f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Tangenten er:

$$\begin{aligned} y &= b(x - x_1) + y_1 \\ &= \frac{1}{4}(x - 4) + 2 \\ &= \underline{\frac{1}{4}x + 1} \end{aligned}$$

Stigningstallet d til normalen i $(a, f(a))$ er:

$$d = -\frac{1}{f'(a)} = -\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{4}}} = -\frac{2\sqrt{4}}{1} = -4$$

Normalen er:

$$\begin{aligned} y &= d(x - x_1) + y_1 \\ &= -4(x - 4) + 2 \\ &= \underline{-4x + 18} \end{aligned}$$

d)

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 \ , \ x = a = 1$$
$$f'(x) = 2x - 2$$

Tangenten og normalen går gjennom punktet $(a, f(a))$:

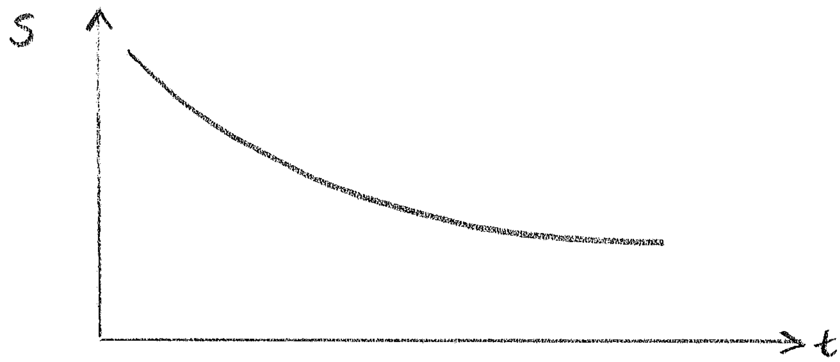
$$f(a) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$$

$\Rightarrow$ punktet er $(1, 4)$

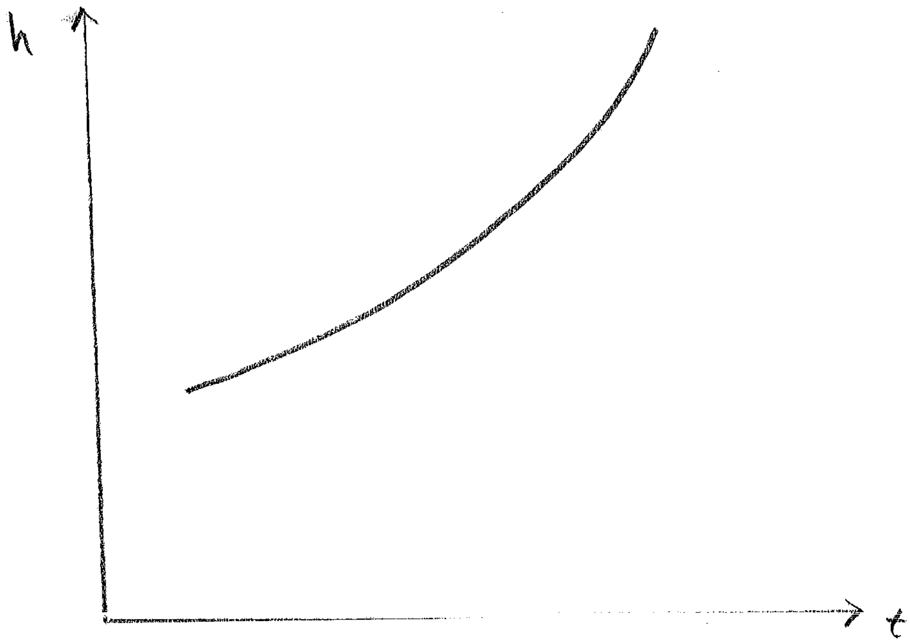
Stigningstallet b til tangenten i $(a, f(a))$ er 0 siden $b = f'(1) = 2(1) - 2 = 0$, og tangenten er derfor den horisontal linjen gitt ved $\underline{y = 4}$. Normalen står vinkelrett på tangenten i punktet $(a, f(a))$ og vi vet dermed at normalen er den vertikale linjen gitt ved $\underline{x = 1}$.

Oppgave 6

a) Når $s'(t) < 0$ synker s med tiden t i det bestemte tidsrommet. Når $s''(t) > 0$ stiger s' som betyr at s er konveks. For strømprisen $s = s(t)$ betyr dette at strømmen blir billigere, men at prisen synker saktere og saktere med tiden t.



b) Når $h'(t) > 0$ stiger h med tiden t. Når $h''(t) > 0$ stiger h' som betyr at h er konveks. For hveteprisen $h = h(t)$ betyr dette at prisen på hvete øker, og at prisen øker raskere og raskere med t.



Oppgave 7

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$$

a) Deriverer f med kvotientregelen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{(\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 1))(x^2 + 1) = (x^2 + 3x + 1)(\frac{d}{dx}(x^2 + 1))}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(2x + 3)(x^2 - 1) - (x^2 + 3x + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(2x^3 + 2x + 3x^2 + 3) - (2x^3 + 6x^2 + 2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{3x^2 - 6x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \underline{\frac{-3(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}}
\end{aligned}$$

b) f har stasjonære punkt der $f'(x) = 0$. Det er når telleren $= 0$ og f er definert. f er definert for alle x siden x^2 er jevn og nevneren aldri kan bli null. Bruker konjugatsetningen for å finne nullpunktene til telleren.

$$-3(x + 1)(x - 1) = 0$$

De stasjonære punktene til f er $\underline{x = 1}$ og $\underline{x = -1}$.

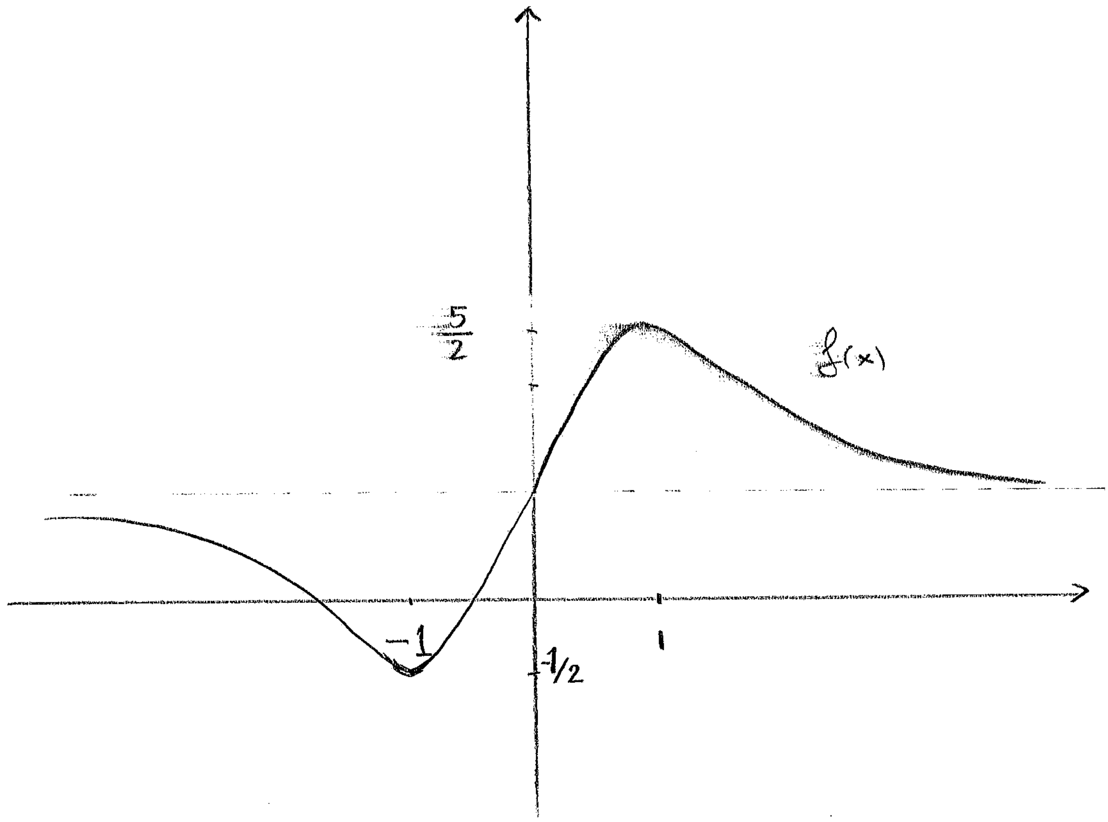
c) Fortegnsskjemaet gir oss at $(-1, f(-1)) = (-1, \frac{1-3+1}{2}) = \underline{(-1, -\frac{1}{2})}$ er et lokalt bunnpunkt og at det er et lokalt toppunkt i $(1, \frac{1+3+1}{2}) = \underline{(1, \frac{5}{2})}$.

d) f vokser når $f'(x) > 0$, og synker når $f'(x) < 0$. Fortengslinja skisserer dette.

f avtar når $\underline{x \in \langle \leftarrow, -1 \rangle \, U \, \langle 1, \rightarrow \rangle}$ og vokser når $\underline{x \in \langle -1, 1 \rangle}$.

e)

$$\left(f(x) = 1 + \frac{3x}{x^2+1} \right)$$



Oppgave 8

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 4}{x + 1} \quad \Rightarrow x \neq -1$$

a)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{(\frac{d}{dx}(x^2 - 4x - 4))(x+1) - (x^2 - 4x - 4)(\frac{d}{dx}(x+1))}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(2x-4)(x+1) - (x^2 - 4x - 4)(1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(2x^2 + 2x - 4x - 4) - (x^2 - 4x - 4)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \\
&= \underline{\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}}
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f'(x) &= \frac{(\frac{d}{dx}(x^2 + 2x))(x+1)^2 - (x^2 + 2x)(\frac{d}{dx}((x+1)^2))}{((x+1)^2)^2} \\
&= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2 + 2x)(\frac{d(x+1)^2}{d(x+1)} \cdot \frac{d(x+1)}{dx})}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2 + 2x)(2(x+1))}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2 + 2x)(2)}{(x+1)^3} \\
&= \frac{(2x^2 + 4x + 2) - (2x^2 + 4x)}{(x+1)^3} \\
&= \underline{\frac{2}{(x+1)^3}}
\end{aligned}$$

c) f har stasjonære punkter der $f'(x) = 0$ så fremt funksjonen er definert. Det er den for $\in <\leftarrow, -1> U <-1, \rightarrow>$ siden nevneren er lik null for $x = -1$. Løser $x^2 + 2x = 0$.

$x(x+2) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$ og $\underline{x = -2}$ er de stasjonære punktene til f.

d) Andrederiverttesten sier at: 1) Hvis $f'(x) = 0$ og $f''(x) < 0$ er $(x, f(x))$ et lokalt toppunkt, og 2) Hvis $f'(x) = 0$ og $f''(x) > 0$ er $(x, f(x))$ et lokalt bunnpunkt.

$$f''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} = \frac{2}{1} = 2\ ,\ (2 > 0)$$

$\Rightarrow (0, f(0)) = (0, \frac{-4}{1}) = \underline{(0, -4)}$ er et lokalt bunnpunkt.

$$f''(-2) = \frac{2}{(-2+1)^3} = \frac{2}{(-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2\ ,\ (-2 < 0)$$

$\Rightarrow (-2, f(-2)) = (0, \frac{(-2)^2 - 4(-2) - 4}{(-2)+1}) = \underline{(-2, -8)}$ er et lokalt toppunkt.

e) f er ikke definert for $x = -1 \Rightarrow f(x)$ <u>har ikke vendepunkter</u>.

f) Fortegnslinja for $f''(x)$ gir at f er konveks når $\underline{x \in <-1, \rightarrow>}$ og at f er konkav når $\underline{x \in <\leftarrow, -1>}$.

f) $\left(f(x) = x - 5 + \frac{1}{x+1} \right)$

skrå asymptote $\quad y = x - 5$

vertikal asymptote $\quad x = -1$.