9 jan 2012

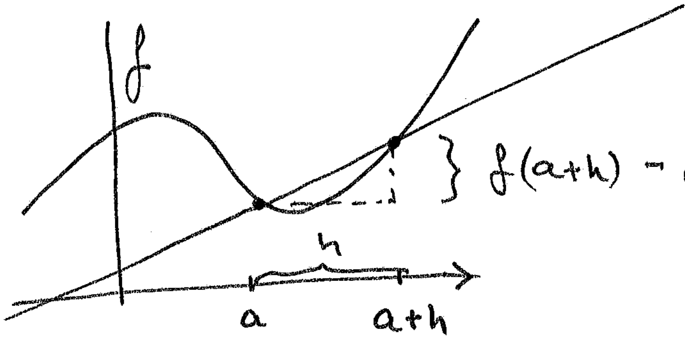
8.6 Vekstfart (endringrate)

(1) $f(x)$ funksjon

Den gjennomsnittlige vekstfarten til $f(x)$ i intervallen $[a, a+h]$ er

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (h \neq 0)$$

Dette er stigningstallet til linja.



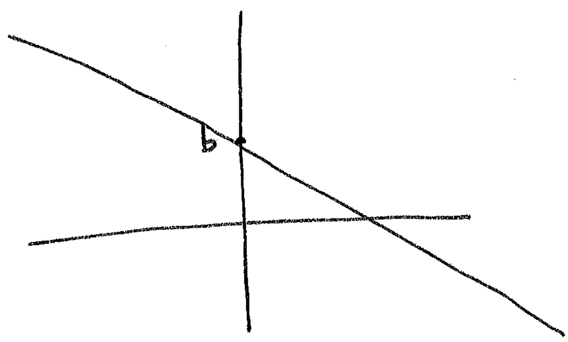
En linje gjennom to punkt på en graf kalles en sekant linje

Eks. $S(t)$ posisjon langs en rett linje

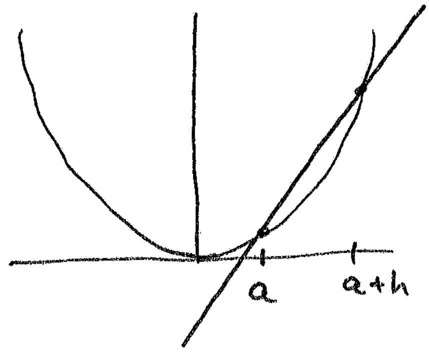
Vekstfarten $\frac{S(a+h) - S(a)}{h}$ er gjennomsnittlig fart i tidsrommet $[a, a+h]$.

Eks. $f(x) = ax + b$

Gjennomsnittlig vekstfart til $f(x)$ er a for alle intervaller $[x, x+h]$.



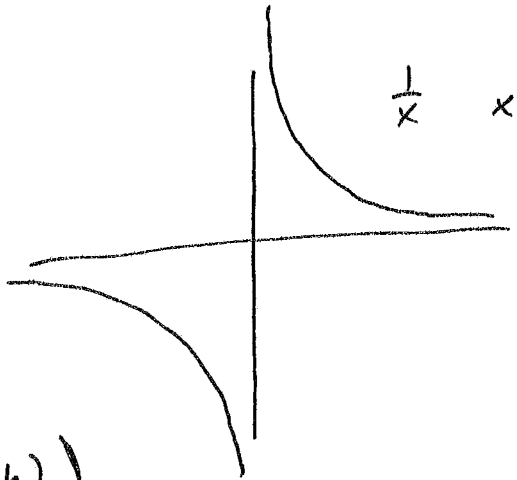
② * $f(x) = x^2$



Gjennomsnittlig vekst i intervallet $[a, a+h]$ er

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \frac{a^2 + 2a\cdot h + h^2 - a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = \underline{2a+h}$$



* $f(x) = \frac{1}{x}$

Gjennomsnittlig vekstfart i $[a, a+h]$ er

$$\frac{\left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right)}{h} = \frac{\left(\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}\right)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(a+h)\cdot a}$$

$$\left(\frac{\left(\frac{-h}{(a+h)\cdot a}\right)}{h} = \frac{h\left(\frac{-1}{(a+h)\cdot a}\right)}{h} \right)$$

$$= \underline{\frac{-1}{a(a+h)}}$$

(Momentan) vekstfart i a er

(3) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$. (grensen trenger ikke eksistere)

Dette kalles den deriverte til $f(x)$ i $x = a$.

Eks. * $f(x) = ax + b$

har momentan vekstfart lik a i alle punkt

* $f(x) = x^2$

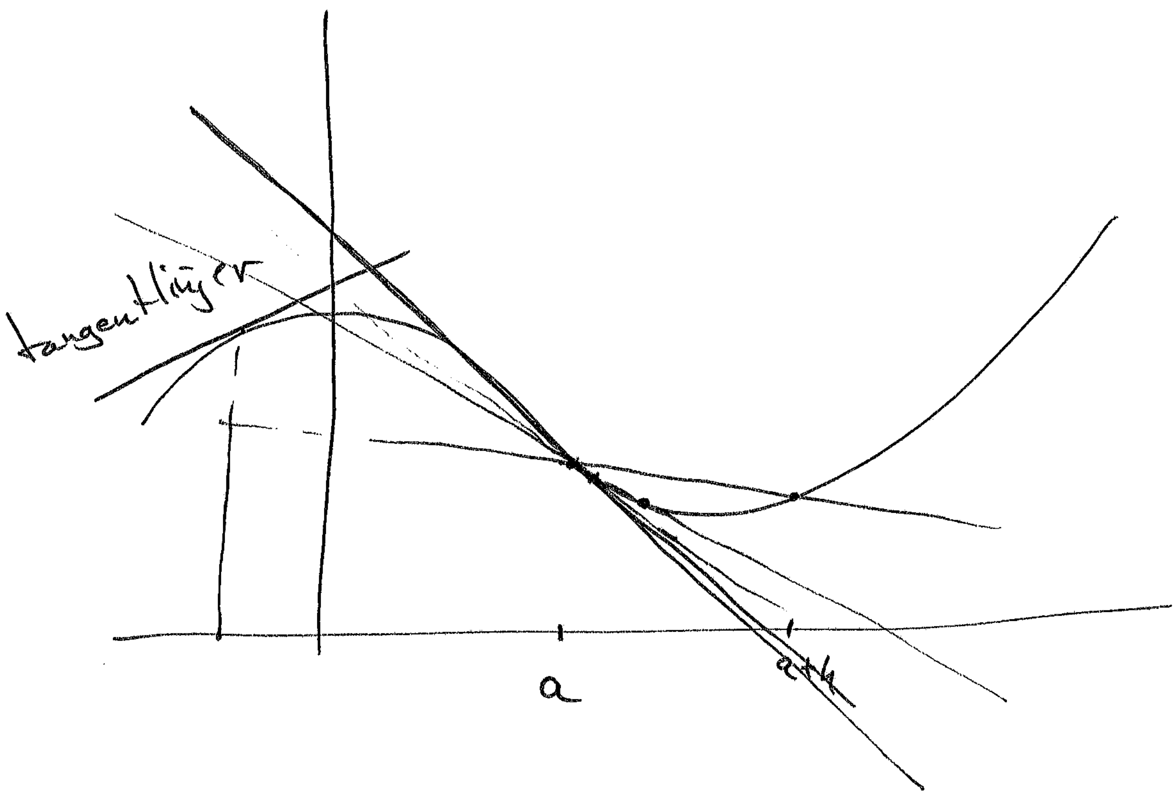
Den momentane vekstfarten i $x = a$ er

$$\lim_{h \to 0} (2a + h) = \underline{2a}$$

* $f(x) = \frac{1}{x}$

Den momentane vekstfarten i $x = a$ er

$$\lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \underline{\frac{-1}{a^2}} \qquad a \neq 0.$$



(4) Tangentlinjen til $f(x)$ i $(a, f(a))$ er grensen av sekantlinjene gjennom $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ når $h \to 0$

Stigningstallet til tangentlinja i $(a, f(a))$ er grensen av stigningstallet til sekantlinjene når $h \to 0$. Dette er den deriverte til $f(x)$ i $x = a$.

Eksempler

$f(x) = x^2$

Gjennomsnittlig vekstfart i $[a, a+h]$ er $2a + h$.

La $a = 1$.

$h = \frac{1}{100} = 0.01$ gj. vekstfart $[1, 1.01]$ er 2.01

$h = \frac{1}{10} = 0.1$ ——— $[1, 1.1]$ er 2.1 ...

Den deriverte til x^2 i $x = 1$ er lik 2.

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$

gj. vekstfart $[a, a+h]$ er $\frac{-1}{a(a+h)}$ $a \neq 0$, $a+h \neq 0$.

$a = \frac{1}{1000} = 0.001$.

$h = \frac{-1}{2000} = -0.0005$

gj vekstfart i $[a, a+h]$

$[0.0005, 0.001]$ er: $\frac{-1}{\left(\frac{1}{1000}\right)\left(\frac{1}{2000}\right)} = -2 \cdot 10^6$

Den deriverte i $a = 0.001$ er $\frac{-1}{a^2} =$

$\frac{-1}{(1/1000)} = -1 \cdot 10^6$.

Gitt $g(x) = 3x^2 - 5$.

Hva er den deriverte i x ?

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(3(x+h)^2 - 5\right) - \left(3x^2 - 5\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[3(x^2 + 2xh + h^2) - 5 - (3x^2 - 5)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[3(2x \cdot h + h^2)\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(h(6x + 3h)\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} 6x + 3h = \underline{\underline{6x}}$$

derivasjon er lineær:

(6) $$\lim_{h\to 0} \frac{(3(x+h)^2-5) - (3x^2-5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{3((x+h)^2-x^2)}{h} + \frac{(-5)-(-5)}{h} \right]$$

$$= 3\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{(-5)-(-5)}{h}$$

$$= 3\cdot(\text{deriverte til } x^2) + \text{deriverte til } (-5).$$

$$= 3\cdot 2x + 0$$

$$= \underline{\underline{6x}}$$

En notasjon for den deriverte til $f(x)$ i $x=a$ er $\frac{df}{dx}(a)$

I praksis gjør vi som følger:

$$\frac{d}{dx}(3x^2-5) = 3\cdot\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(-5)$$

$$= 3\cdot 2x - 0$$

$$= 6x$$

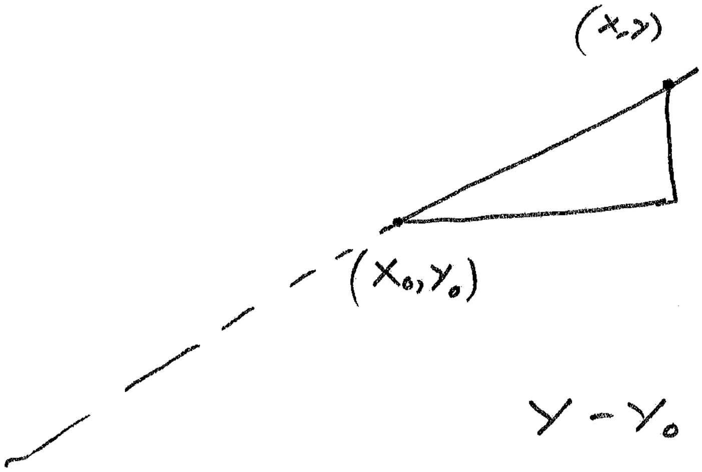
7

$$\frac{d}{dx}(3x^2-5) = 6x \quad , \quad f(x) = 3x^2-5$$

Beskriv tangent linjen gjennom punktet $(-2, 7)$.

Stigningstallet til $f(x)$ i $(-2,7)$ er $\frac{d}{dx} f(x)$ i $x = -2$. stigningstallet er $6(-2) = \underline{-12}$

stigningstall a



$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = a$$

$$y - y_0 = a(x-x_0)$$

$$\underline{y = a(x-x_0) + y_0}$$

$(x_0,y_0) = (-2,7)$

$a = -12$

$$y = -12(x-(-2)) + 7$$

$$= -12x - 24 + 7$$

$$\underline{y = -12x - 17}$$