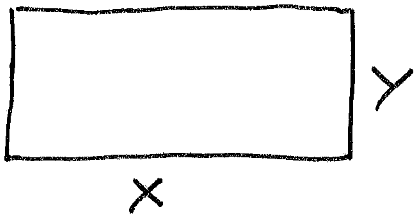
19. januar 2012

9.5 Optimalisering

(1) Det rektangelet med størst areal, hvor summen av lengdene på sidene er fast, er et kvadrat.

Vi viser dette:



$x, y > 0$

$2x + 2y = L$ (konstant)

når er $x \cdot y$ størst

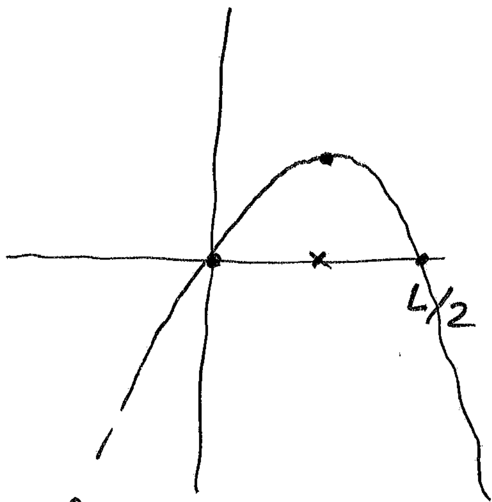
$2x + 2y = L$ gir at $2y = L - 2x$

$$y = \frac{L}{2} - x$$

Arealet $A(x) = x \cdot y = x\left(\frac{L}{2} - x\right)$

$$= -x^2 + \frac{L}{2} \cdot x$$

1)



toppunktet er

$\left(\frac{L}{4}, \left(\frac{L}{4}\right)^2\right)$

$x = y = \frac{L}{4}$ kvadrat.

alternativt

2) $A(x)$ $0 \le x \le \frac{L}{2}$

$A'(x) = -2x + \frac{L}{2}$ $A'(x) = 0$ $x = \frac{L}{4}$.

Kritiske punkt: $0, \frac{L}{2}$ og $\frac{L}{4}$.

$A(0) = A\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ $A\left(\frac{L}{4}\right) = \left(\frac{L}{4}\right)^2$.

arealet er størst når $x = y = \frac{L}{4}$ (kvadrat).

Reformulering.

(2) Bestem $x, y > 0$ slik at $x \cdot y = K^{>0}$ konstant

og $x + y$ er minst mulig.

<u>Løsning</u> $x = y = \sqrt{K}$.

Til orientering.

$$a_1, \ldots, a_n \geq 0$$

Aritmetisk gjennomsnitt $\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$

Geometrisk gjennomsnitt $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.

Resultat: $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$.

$n = 2$ $\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$.

bevis. $a_1 + a_2 = L$

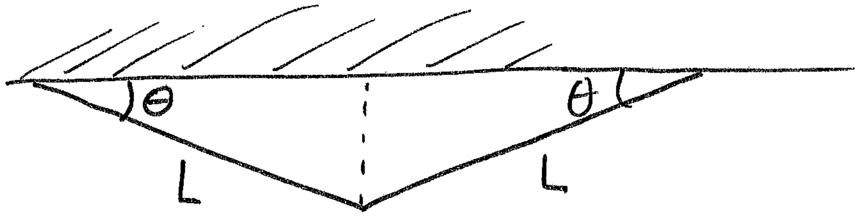
$a_1 \cdot a_2$ er størst mulig når $a_1 = a_2 = \frac{L}{2}$.

$$a_1 \cdot a_2 \leq \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\underline{\sqrt{a_1 a_2}} \leq \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{2} = \underline{\frac{a_1 + a_2}{2}}$$

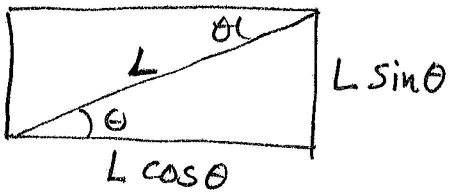
(3)

Eks.



L konstant.

Hvilke vinkel θ gir størst mulig areal?



Arealet

$$A(\theta) = (L\sin\theta)(L\cos\theta)$$
$$= L^2 \sin\theta \cos\theta.$$

$$\frac{\sin(2\theta)}{2} = \frac{\cancel{2}\sin\theta\cdot\cos\theta}{\cancel{2}} = \sin\theta\cdot\cos\theta.$$

$$A(\theta) = L^2\,\frac{\sin(2\theta)}{2}.$$

$\sin 2\theta$ er størst når den er lik 1.

Det er når $2\theta = 90^\circ$

$$\underline{\underline{\theta = 45^\circ}}$$

④

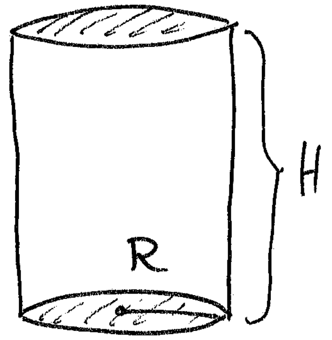
Sylindrisk boks med volum V.

Topp og bunn er A ganger tykkere enn sylinderveggen.

Hvilke dimensjoner til R og H vil minimere materialkostnader.

Finn forholdet $\frac{H}{D}$.

Volum V



Diameter $D = 2R$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$M = \left[(2\pi \cdot R) \cdot H + 2 (\pi \cdot R^2) \cdot A \right] \cdot \text{(tykkelse til sylindervegg)}$$

(proporsjonal til materialkostnaden)

Vi skal minimere M når $\pi R^2 \cdot H = V$ (konstant)

$$H = \frac{V}{\pi R^2}$$

$$M(R) = \left[2\pi \cdot R \cdot \frac{V}{\pi \cdot R^2} + 2\pi R^2 \cdot A \right]$$

$$M(R) = \left[\frac{2V}{R} + 2\pi R^2 \cdot A \right]$$

$$M'(R) = \left[2V(-1) R^{-2} + 2\pi (2R) \cdot A \right]$$

$$M'(R) = 0$$

$$0 = 2\left(-V/R^2 + 2\pi A \cdot R \right)$$

$$V/R^2 = 2\pi A \cdot R$$

⑤

$$\frac{V}{R^3} = 2\pi \cdot A$$

setter inn for V

$$\frac{\pi R^2 \cdot H}{R^3} = 2\pi \cdot A$$

$$\frac{H}{R} = 2 \cdot A$$

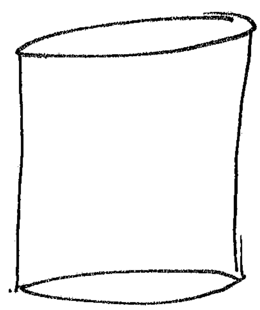
$$\boxed{\frac{H}{D} = A}$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{V}{2\pi A} &= R^3 \\ \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi A}} &= R \end{aligned} \right)$$

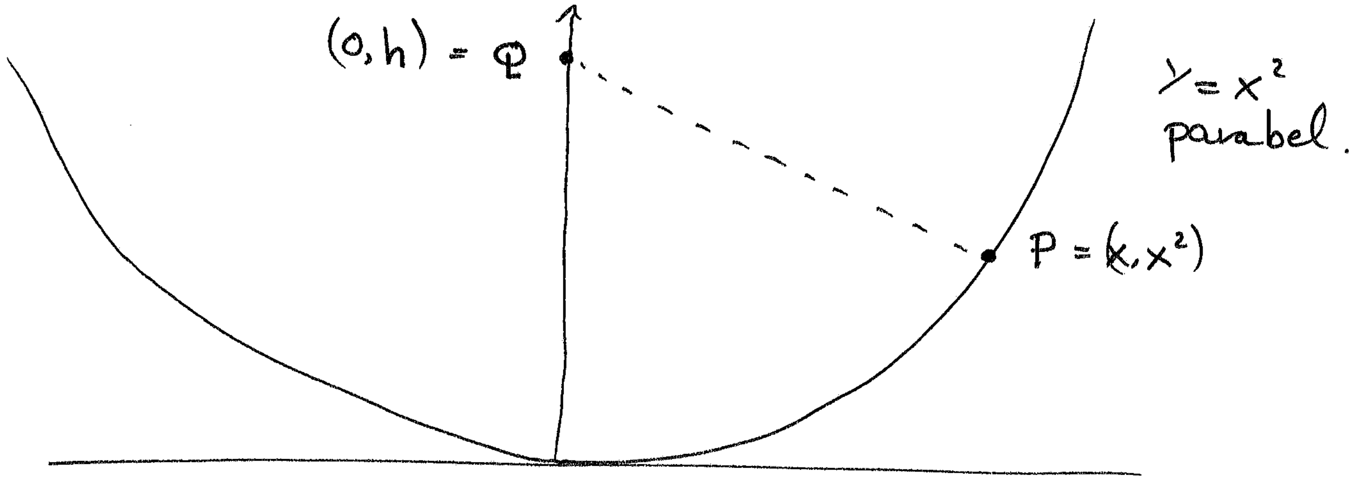
$$D = 2R$$

$A = 1$ samme tykkelse over alt:

$$\frac{H}{D} = 1$$



⑥



Finn punktene på grafen til $y = x^2$
som er nærmest punktet
$Q = (0,h)$ på y-aksen. $(h \geq 0)$

Avstanden mellom P og Q er:

$$L(x) = |\vec{QP}| = |[x-0,\ x^2-h]| = \sqrt{x^2 + (x^2-h)^2}$$

$L(x)$ er minst mulig når $L^2(x)$ er minst mulig.

$$L^2(x) = x^2 + (x^2-h)^2 = x^2 + x^4 - 2hx^2 + h^2$$

$$\left(L^2(x)\right)' = \left(x^4 + x^2(1-2h) + h^2\right)'$$

$$= 4x^3 + 2x(1-2h) = 2x\left(2x^2 + (1-2h)\right)$$

Dette er null når:

$x = 0$ eller når $2x^2 = 2h-1$
$x^2 = h - \frac{1}{2}$.

$h < \frac{1}{2}$ $x = 0$ eneste kritiske punkt.
origo $(0,0)$ er nærmest Q.

(7) $h \geq \frac{1}{2}$

$$x^2 = h - \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{h-\frac{1}{2}}\,.$$

Sjekker at Q er nærmest punktet P

hvor $x = \pm\sqrt{h-\frac{1}{2}}$. for $h > \frac{1}{2}$. :

$$L\left(\pm\sqrt{h-\tfrac{1}{2}}\right) = \sqrt{\left(\left(h-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\left(h-\tfrac{1}{2}\right)-h\right)^2\right.}$$

$$= \sqrt{h-\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{h-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$= \underline{\sqrt{h-\frac{1}{4}}}\,.$$

Dette er mindre enn (eller lik) avstanden fra Q til origo, som er h. (når $h \geq \frac{1}{2}$)

$$\left[\cancel{\left(h-\sqrt{h-\tfrac{1}{4}}\right)\left(h+\sqrt{h-\tfrac{1}{4}}\right)}\right]$$

$$h^2 - \left(\sqrt{h-\frac{1}{4}}\right)^2 = h^2 - h + \frac{1}{4}$$

$$= \left(h-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$h^2 \geq \left(\sqrt{h-\frac{1}{4}}\right)^2$$

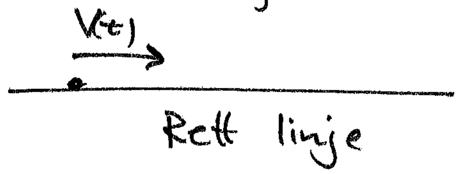
$$h \geq \sqrt{h-\frac{1}{4}} \quad \text{for } h \geq \frac{1}{2}$$

likhet holder for $h = \frac{1}{2}$.

Origo, (0.0) er nærmest for $h \leq \frac{1}{2}$. Avstanden er $|h|$.

Punktene $\left(\sqrt{h-\frac{1}{2}},\ h-\frac{1}{2}\right)$ og $\left(-\sqrt{h-\frac{1}{2}},\ h-\frac{1}{2}\right)$ er nærmest for $h > \frac{1}{2}$. Avstanden er da $\sqrt{h-\frac{1}{4}}$.

9.6 Fart og akselerasjon



$S(t)$ posisjonen i tiden t

$$V(t) = \frac{d}{dt} S(t) = S'(t) = \dot{S}(t)$$

Akselerasjon $a(t) = \frac{d}{dt} V(t) = \frac{d^2}{dt^2} S(t)$

$$= S''(t)$$

$$= \ddot{S}(t)$$

Bevegelseslikningen ved konstant akselerasjon a.

$$S(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + V \cdot t + S_0$$

$$V(t) = S'(t) = \frac{1}{2} a (2t) + V \cdot 1$$

$$V(t) = a \cdot t + V$$

$$a(t) = (V(t))' = (at + V)' = a.$$

$S = S(0)$ $\quad V = V(0)$

$$S(t) = (2\,m/s^3)\, t^3 - (3\,m/s^2)\, t^2 + 2m$$

$$V(t) = (2\,m/s^3)\, 3t^2 - (3\,m/s^2) \cdot 2t$$

$$= (6\,m/s^3) \cdot t^2 - (6\,m/s^2) \cdot t$$

$$a(t) = (12\,m/s^3) \cdot t - (6\,m/s^2)$$