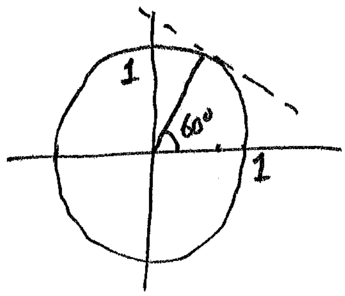
31. jan 2012

Implisitt derivasjon

(1) La $F(x, y)$ være en funksjon av to variabler x og y. Grafen til $F(x,y) = 0$ består av alle punkt (x,y) slik at $F(x,y) = 0$.

Eks $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Grafen $F(x,y) = 0$ er en sirkel med radius 1 og senter i origo



$F(x,y) = y - f(x)$

Grafen til $F(x,y) = 0$ er grafen til funksjonen $y = f(x)$

(y er gitt eksplisitt som en funksjon av x)

Anta y er gitt implisitt ved $F(x,y) = 0$.

Vi skal finne $\frac{dy}{dx}$ uttrykt ved x og y.

$F(x,y) = 0$

$\frac{d}{dx} F(x,y) = 0$

Dette gir en lineær likning i $\frac{dy}{dx}$ hvor koeffisientene er funksjoner i x og y

② Eks $\quad F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+(y_{(x)})^2-1\right) = 2x + \frac{dy^2}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \left(\frac{d\,y_{(x)}^2}{dx} \underset{\text{regel}}{\overset{\text{kjerne-}}{=}} \frac{dy^2}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2x = -2y\frac{dy}{dx}$$

$y \neq 0$: $\underline{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y}}$.

Punktet $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ligger på sirkelen.

Stigningstallet til tangenten i P er:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Stigningstallet i punktet $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ er:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Avgrense oss til halvsirkelen over x-aksen.

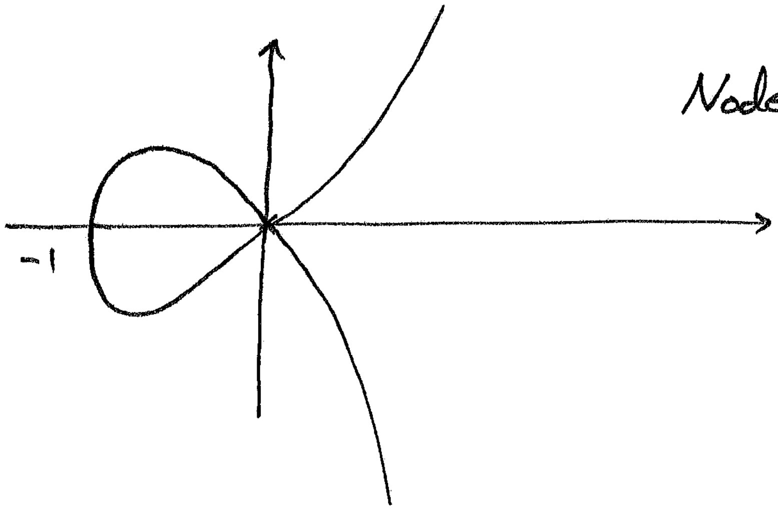
Da er $\quad y = \sqrt{1-x^2} \qquad u = 1-x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{u}}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{2y}\cdot(-2x) = \underline{\frac{-x}{y}}$$

3 $\quad F(x,y) = y^2 - x^3 - x^2 = 0$

$$y^2 = x^3 + x^2 = x^2(1+x) \qquad x \geq -1$$



Node

Implisitt derivasjon

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 - x^3 - x^2\right) = 0$$

$$\frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}\left(x^3 + x^2\right) = 0$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} - \left(3x^2 + 2x\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2x}{2y} \qquad y \neq 0.$$

Punktet $(3,6)$ ligger på grafen.

Finn tangentlinjen til grafen i $(3,6)$.

Stigningstallet til tangentlinjen gjennom $(3,6)$

er $\frac{dy}{dx}(3,6) = \frac{3\cdot(3^2) + 2\cdot(3)}{2(6)} = \frac{33}{12} = \frac{11}{4}$

Linja er : $y = \frac{11}{4}(x-3) + 6$

$$= \frac{11x}{4} - \frac{33}{4} + 6 = \frac{11x}{4} + \frac{-33+24}{4}$$

$$\underline{y = \frac{11x - 9}{4}}$$

nær kryssningspunktet $(0,0)$:

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+2x}{2y} \sim \frac{x}{y}$ og fra $F(x,y)=0$

$y^2 \sim x^2$

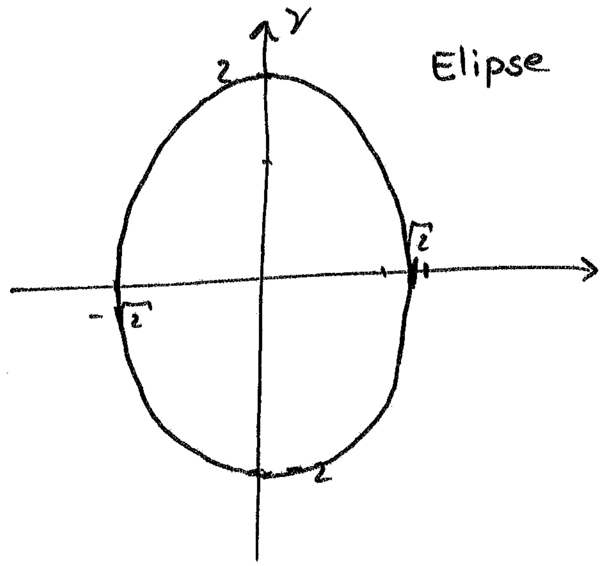
$y \sim x$ elle $y \sim -x$.

$\frac{dy}{dx} = 1$ eller $\frac{dy}{dx} = -1$ (forutsatt at de eksisterer)

Eks $2x^2 + y^2 = 4$

Finn tangentlinjen i punktet $(1, -\sqrt{2})$.

$(\sqrt{2}x)^2 + y^2 = 2^2$



$\frac{d}{dx}(2x^2+y^2) = \frac{d}{dx} 4 = 0$

$4x + \frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$

$4x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y}$ $\quad y \neq 0$

Stigningstallet til tangenten i $(1, -\sqrt{2})$ er

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(1)}{-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2} = \underline{\sqrt{2}}$

Tangentlinja : $y = \sqrt{2}(x-1) + (-\sqrt{2}) = \underline{\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}}$

Deriver funksjonene

1) $2x^3$

2) $\frac{1}{x^3}$

Test i slutten av 2. time (15 minutter).

3) $\sqrt[3]{x}$

4) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

5) $(x^2-4)^5$

6) $(x^2-4)^5 \cdot \sqrt{x}$

Løsning

1) $(2x^3)' = 2(x^3)' = 2\cdot 3 \cdot x^{3-1} = \underline{6x^2}$

2) $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3\cdot x^{-4} = \underline{\frac{-3}{x^4}}$

3) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}\cdot x^{1/3-1} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \underline{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$

4) $(1/\sqrt[3]{x})' = (x^{-1/3})' = -\frac{1}{3}x^{-4/3} = \underline{\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}}$

5) $((x^2-4)^5)' = 5(x^2-4)^4 \frac{d(x^2-4)}{dx} = 10x(x^2-4)^4$

kjerneregelen

6) $\frac{d}{dx}\left((x^2-4)^5\sqrt{x}\right) = \left(\frac{d}{dx}(x^2-4)^5\right)\cdot\sqrt{x} + (x^2-4)^5\frac{d}{dx}\sqrt{x}$ (produktregelen)

ved 5)

$= 10x(x^2-4)^4\cdot\sqrt{x} + (x^2-4)^5\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= (x^2-4)^4\left[10x\sqrt{x} + (x^2-4)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$

$= \frac{(x^2-4)^4}{2\sqrt{x}}\left[20x^2 + x^2 - 4\right] = \underline{\underline{\frac{(x^2-4)^4(21x^2-4)}{2\sqrt{x}}}}$