27. feb. 2012

1.1 Eksponentialfunksjoner og Logaritmefunksjoner

a^r $\qquad a > 0 \quad a \neq 1$

(1) $\qquad r$ reelt tall

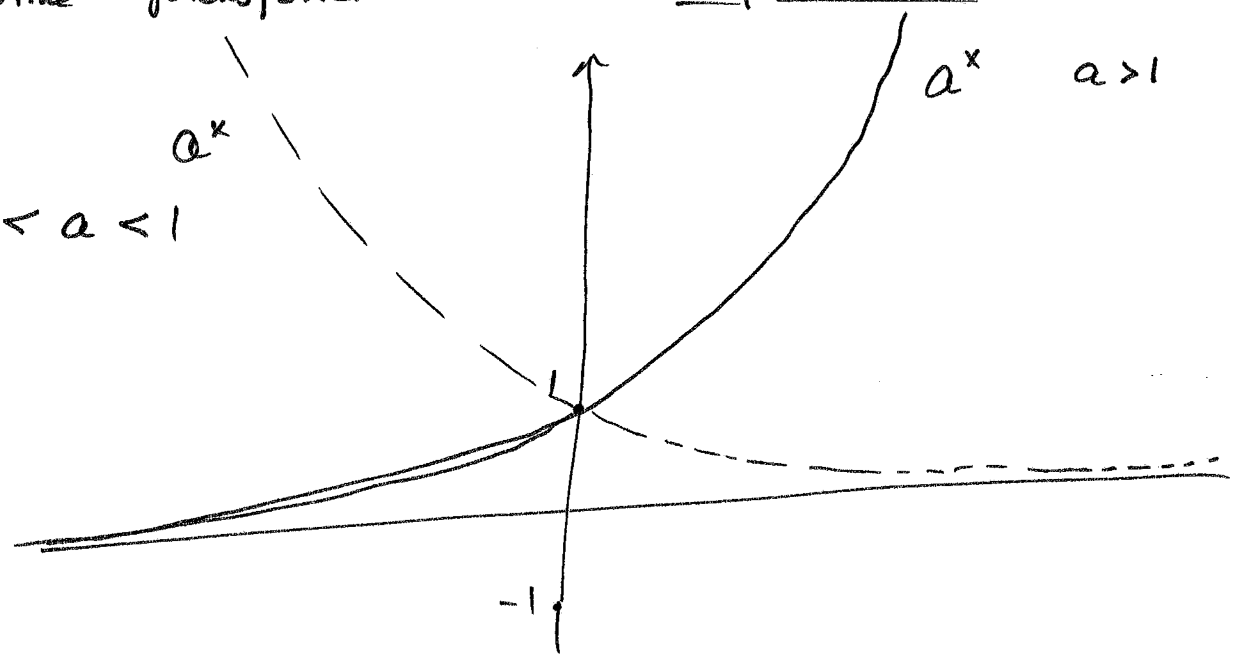
r potens, eksponent $\quad a$ grunntall.

Til nå har vi sett på funksjonen x^r (r fast)

Vi skal nå holde grunntallet fast og la eksponenten være variabelen : $f(x) = a^x$

eks. 2^x, 10^x, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Slike funksjoner kalles eksponentialfunksjoner.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

$$a^{-x} = (a^{-1})^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

$f(x) = a^x$ er voksende for alle x når $a > 1$

$\qquad$ avtagende $\qquad$ når $0 < a < 1$.

② Verdimengden til a^x $0<a$ $a \neq 1$

er alle positive reelle tall.

For alle $y>0$ så finnes det akkurat en x slik-at $a^x = y$.

eks $10^x = 1000$ Løsningen er $x = 3$.

eks $10^{2x} - 9 \cdot 10^x - 10 = 0$ $(*)$

$(10^x)^2 - 9 \cdot 10^x - 10 = 0$ $U = 10^x$

$U^2 - 9 \cdot U - 10 = 0$

$\left((U - r_1)(U - r_2) = U^2 - (r_1 + r_2)U + r_1 \cdot r_2\right)$

$(U - 10)(U + 1) = 0$

$U = 10$ og $U = -1$.

$10^x = 10$ $10^x = -1$

$\underline{x = 1}$ ingen løsning

Løsningen til $(*)$ er $\underline{\underline{x = 1}}$

eks $10^x = 10^{12}$ $x = 12$

$10^x = 0{,}001 = \frac{1}{1000}$ $x = -3$

$10^x = 1000000$ $x = 6$

$10^x = 2$?

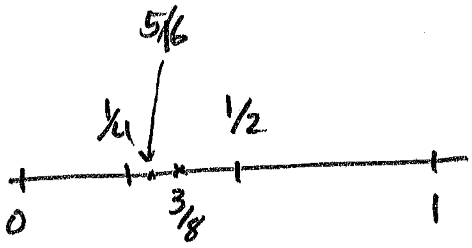
(3) Prøve oss fram.

$10^{1/2} = \sqrt{10} = 3.162\ldots$

$10^{1/4} = 1.778\ldots$

$10^{3/8} = 2.37\ldots$

$10^{5/16} = 2.0535\ldots$



$5/16 = 0.3125\ldots$

$10^{0.3} = 1.995\ldots$

Løsningen til $10^x = y$ $\quad y > 0$

kalles logaritmen til y, $\mathrm{Log}(y)$.

$\mathrm{Log}(y)$ er en funksjon definert for alle positive reelle tall.

$10^x = 2$ har løsning

$x = \mathrm{Log}\, 2$

$x = 0.301029995\ldots$

Eks $5^x = 10$

(4) (et forsøk: $5^x = 5 \cdot 2$, $5^{x-1} = 2$)

$$\text{Log } 5^x = \text{Log } 10 = 1$$

$$x \cdot \text{Log } 5 = 1$$

$$x = \frac{1}{\text{Log } 5} = \underline{1{,}43067\ldots}$$

oppg

$$3^{2x} = 1000$$

$$\text{Log } 3^{2x} = \text{Log } 10^3 = 3$$

$$2x \,\text{Log } 3 = 3$$

$$x = \frac{3}{2 \,\text{Log } 3} = \underline{3{,}14385491\!\!1}$$

$$\left(= \frac{3}{(\text{Log } 3) \cdot 2} \right)$$

eks * $10^x = 5,37$

(5) $x = \text{Log } 5,37 = \underline{0.7299}\ldots$

* $10^{5x} = 0.0111$

$5x = \text{Log } 0.0111$

$x = \frac{1}{5}\text{Log } 0.0111 = \underline{-0,3909}\ldots$

* $10^{2x} - 4 \cdot 10^x = 0$

$10^x(10^x - 4) = 0$

$10^x = 0$ og $10^x = 4$

ingen løsning $x = \text{Log } 4 = \underline{0.6020}\ldots$

Egenskaper til 10^x

1) $10^0 = 1$
2) $10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$
3) $(10^x)^y = 10^{x \cdot y}$

Egenskaper til Log

1) $\text{Log } 1 = 0$
2) $\text{Log}(x \cdot y) = \text{Log } x + \text{Log } y$
3) $\text{Log}(x^r) = r \cdot \text{Log } x$

bevis 2) $x \cdot y = 10^{\text{Log}(x \cdot y)}$

$$= 10^{\text{Log } x} \cdot 10^{\text{Log } y} = 10^{\text{Log } x + \text{Log } y}$$

Derfor er $\text{Log}(x \cdot y) = \text{Log } x + \text{Log } y$.

3) $x^r = 10^{\text{Log}(x^r)}$

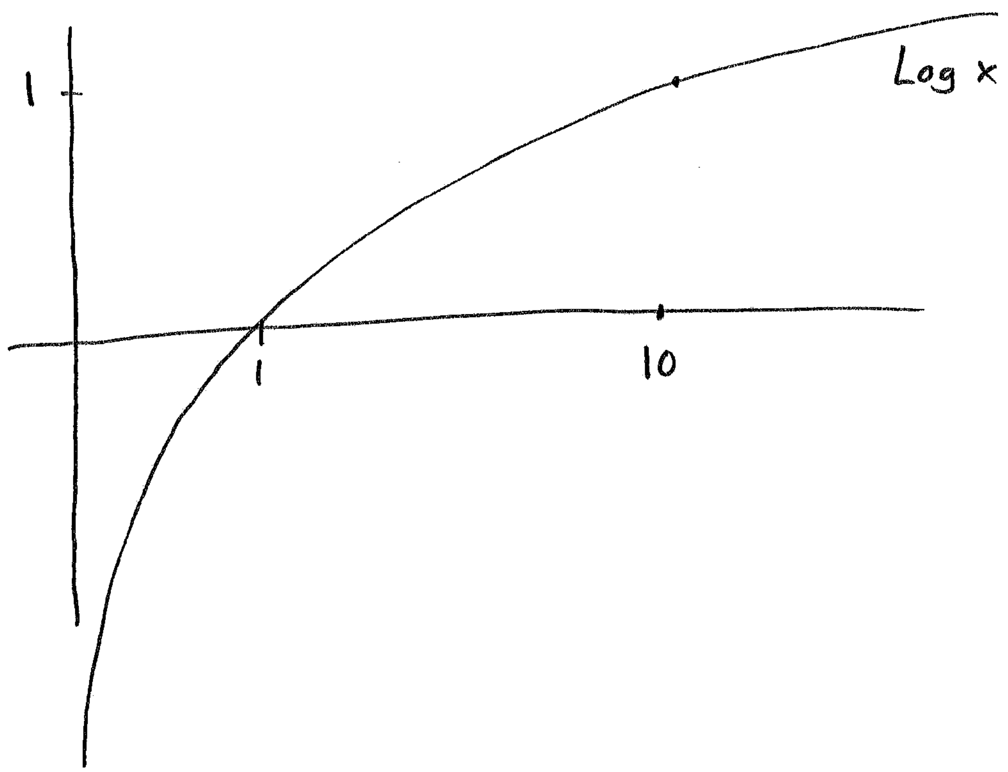
$$= \left(10^{\text{Log } x}\right)^r = 10^{r \cdot \log x}$$

Derfor er $\text{Log } x^r = r \cdot \text{Log } x$.

6

$10^{\text{Log } x} = x$ og $\text{Log } 10^y = y$

$x > 0$ alle y.



La $a > 0$ $a \neq 1$

Logaritme med basis a

$\log_a$ er definert ved

(7) $$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$\log_2 x = \frac{1}{\log 2} \cdot \log x = (3.3219\ldots) \cdot \log x.$$

2-er logaritme

bevis: $a = 10^{\log a}$

$$x = a^{\log_a x} = \left(10^{\log a}\right)^{\log_a x} = 10^{\log(a) \cdot \log_a x}$$

$$= 10^{\log x}$$

Derfor er $\log x = \log(a) \cdot \log_a x$

og $$\log_a x = \frac{\log x}{\log(a)}$$

eks

$$2^3 = 8$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{\log 2^3}{\log 2} = \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3$$

eks

(8)

$$3 \log x = -1$$

$$\log x = \frac{-1}{3}$$

$$10^{\log x} = 10^{-1/3}$$

$$x = 10^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = 2,1544...$$

$$\log x^7 + \log \frac{1}{x^5} = 1 + \log x$$

$$7 \cdot \log x + (-5) \log x = 1 + \log x$$

$$2 \log x = 1 + \log x$$

$$\log x = 1$$

$$x = 10 = 10^1$$

$$\left(2 \log x = \log x + \log x = 1 + \log x \right)$$

$$-\log x \qquad -\log x$$

$$\text{Så} \quad \log x = 1$$