5.03.2012 Funksjonsdrøfting 11.7 & 11.9.

1

Hva er grensene $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x$?

$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$?

Prøver først med Log (istedenfor ln)

$x = 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

$10^{-n} \cdot \log(10^{-n}) = 10^{-n}(-n)$

"går mot 0 mye raskere enn $-n$ går mot $-\infty$"

$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$

$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$

$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (tilsvarende argument)

(2) La $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $x > 0$

* nullpunkt
* ekstremalpunkt
* vendepunkt
* asymptoter.

$$f'(x) = \left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right)'$$
$$= (\ln x)' \cdot \frac{1}{x} + (\ln x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) = \underline{\frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left((1 - \ln x) \cdot \frac{1}{x^2}\right)'$$
$$= (1 - \ln x)' \cdot \frac{1}{x^2} + (1 - \ln x) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$
$$= \left(\frac{-1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} + (1 - \ln x) \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right)$$
$$= \frac{-1}{x^3} + \frac{-2(1 - \ln x)}{x^3}$$

$$f''(x) = \underline{\frac{2\ln x - 3}{x^3}}$$

Nullpunkt: $f(x) = 0$ $\quad \ln x = 0$

$$x = e^{\ln x} = e^0 = 1$$

$f(x)$ har nullpunktet $\underline{x = 1}$.

Ekstremalpunkt: $f'(x) = 0$, $\quad 1 - \ln x = 0$

$\left(f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}\right)$ $\quad \ln x = 1$

Kritisk punkt: $x = e$. $\quad x = e^{\ln x} = e^1 = e$

$$f''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} = \frac{2 - 3}{e^3}$$
$$= \frac{-1}{e^3} < 0 \text{ (konkav ned)}$$

Toppunkt: $\underline{\left(e, \frac{1}{e}\right)}$

Vendepunkt : $f''(x)$ eksisterer for alle $x>0$.

$f''(x) = 0$.

(3)

$$2\ln x - 3 = 0$$

$$\frac{\cancel{2}\ln x}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\ln(x) = 3/2$$

$$x = e^{\ln x} = e^{3/2} = e^{1+1/2}$$

$$= e^{1} \cdot e^{1/2} = \underline{e\sqrt{e}}$$

nevneren x^3 til $f''(x)$ er positiv

$\ln x$ er en økende funksjon

Derfor er $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$ negativ for $0<x<e^{3/2}$

positiv for $x>e^{3/2}$

$$f(e^{3/2}) = \frac{\ln(e^{3/2})}{e^{3/2}} = \frac{3/2}{e^{3/2}} = \underline{\frac{3}{2\sqrt{e}\cdot e}}$$

Punktet $\left(e^{3/2}, \dfrac{3}{2e^{3/2}}\right)$ er et vendepunkt.

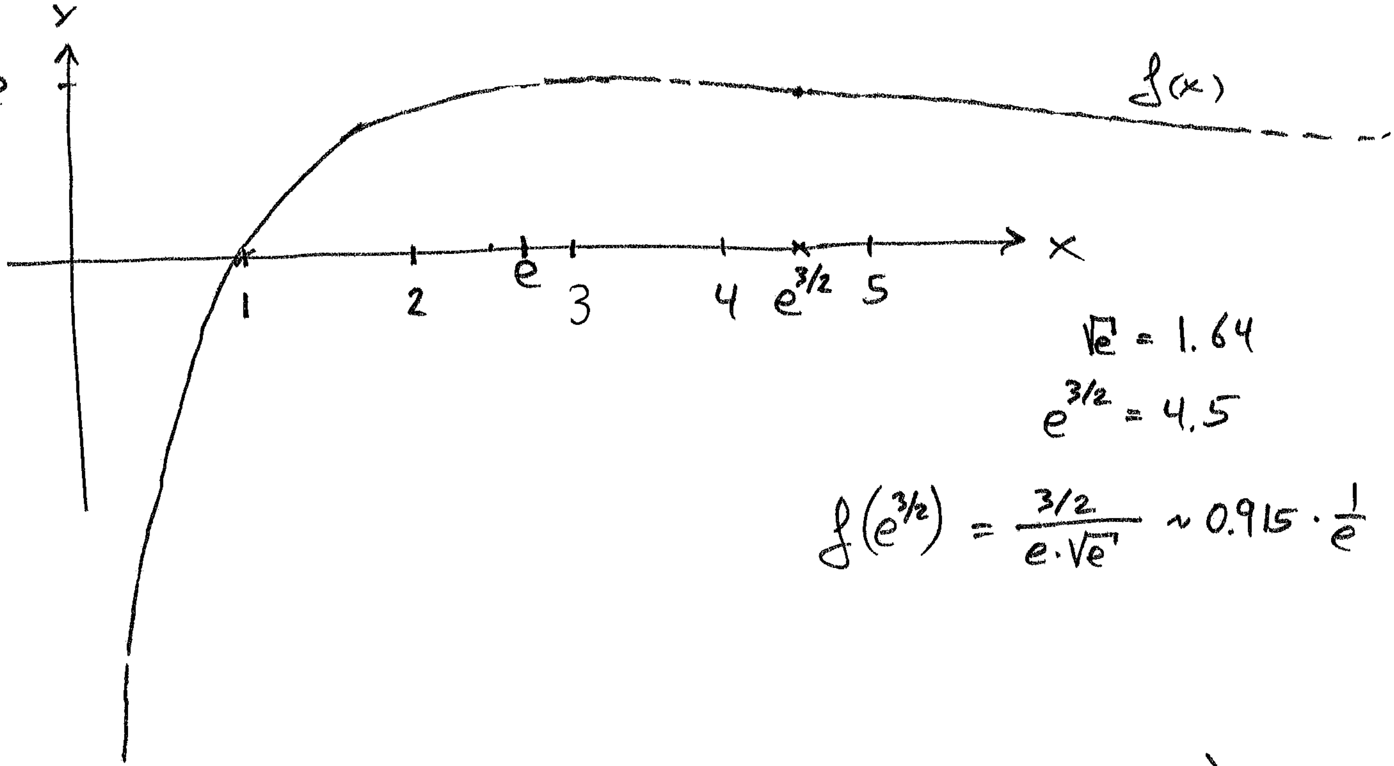
Asymptoter : Horisontal asymptote $y = 0$ (x-aksen)

siden $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \ln x = -\infty$$

Så $x = 0$ (y-aksen) er en vertikal asymptote.

(4)



$\sqrt{e} = 1.64$

$e^{3/2} = 4.5$

$$f(e^{3/2}) = \frac{3/2}{e \cdot \sqrt{e}} \sim 0.915 \cdot \frac{1}{e}$$

Digresjon : $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{n} \cdot (\text{antall primtall} \leq n) = 1.$

Primtallsteoremet.

Eks. $n = 10^9$ (en milliard)

$\ln n = \ln 10^9 = 9 \cdot \ln 10 \sim 9 \cdot (2.30) \sim 20.7.$

Blant de milliard første positive heltall er omtrent ett av tjue tall primtall.

(5%)

⑤ Finn nullpunkt og ekstremalpunkt, samt asymptoter

til $f(x) = \ln(x^2+2x-3)$ hvor def.

$g(x) = \ln|(x^2+2x-3)|$ —— " ——

Lag en skisse av grafen.

(Husk at $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

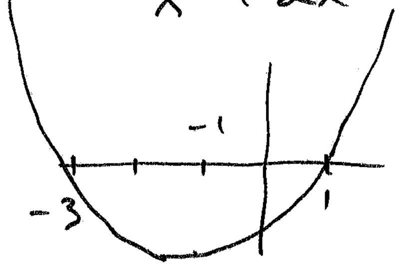
$\ln 1 = 0$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ $\quad x \neq 0$)

——

Ser først på x^2+2x-3.

$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$ er 0 når $x=-3, 1$.



Fullfører kvadratet:

$x^2+2x-3 = (x+1)^2 - 4$.

$f(x)$ har definisjonsmengde $x<-3$ og $x>1$.

$g(x)$ —— " —— Alle x s.a. $x \neq -3$ og $x \neq 1$

Nullpunkt:

$g(x) = 0$

$$e^{\ln|x^2+2x-3|} = e^0$$

$$|x^2+2x-3| = e^0 = 1.$$

$x^2+2x-3 = \pm 1$

$(x+1)^2 - 4 = \pm 1$

$(x+1)^2 = 4 \pm 1$.

⑥ $(x+1)^2 = 3$ $\qquad x = -1 \pm \sqrt{3}$ Nullpunkt

$(x+1)^2 = 5$ $\qquad x = -1 \pm \sqrt{5}$. til $g(x)$.

Nullpunktene til $f(x)$ er $x = -1 \pm \sqrt{5}$

Ekstremalpunkt:

$$g'(x) = \left(\ln|x^2+2x-3|\right)'$$ kjerneregelen

$$= \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot (x^2+2x-3)'$$

$$= \frac{2x+2}{x^2+2x-3} = \frac{2(x+1)}{x^2+2x-3}.$$

$g'(x) = 0$ når $x = -1$. (det eneste kritiske punktet)

$g'(x) > 0$ til venstre for $x = -1$

og $g'(x) < 0$ til høyre for $x = -1$.

1. derivert testen gir at

$(-1, g(-1)) = (-1, \ln 4)$ er et toppunkt.

$f(x)$ har ikke ekstremalverdier.

$x = -3$ og $x = 1$ er vertikale asymptoter for $f(x)$ og $g(x)$

$g(x)$ har ikke horisontale asymptoter.

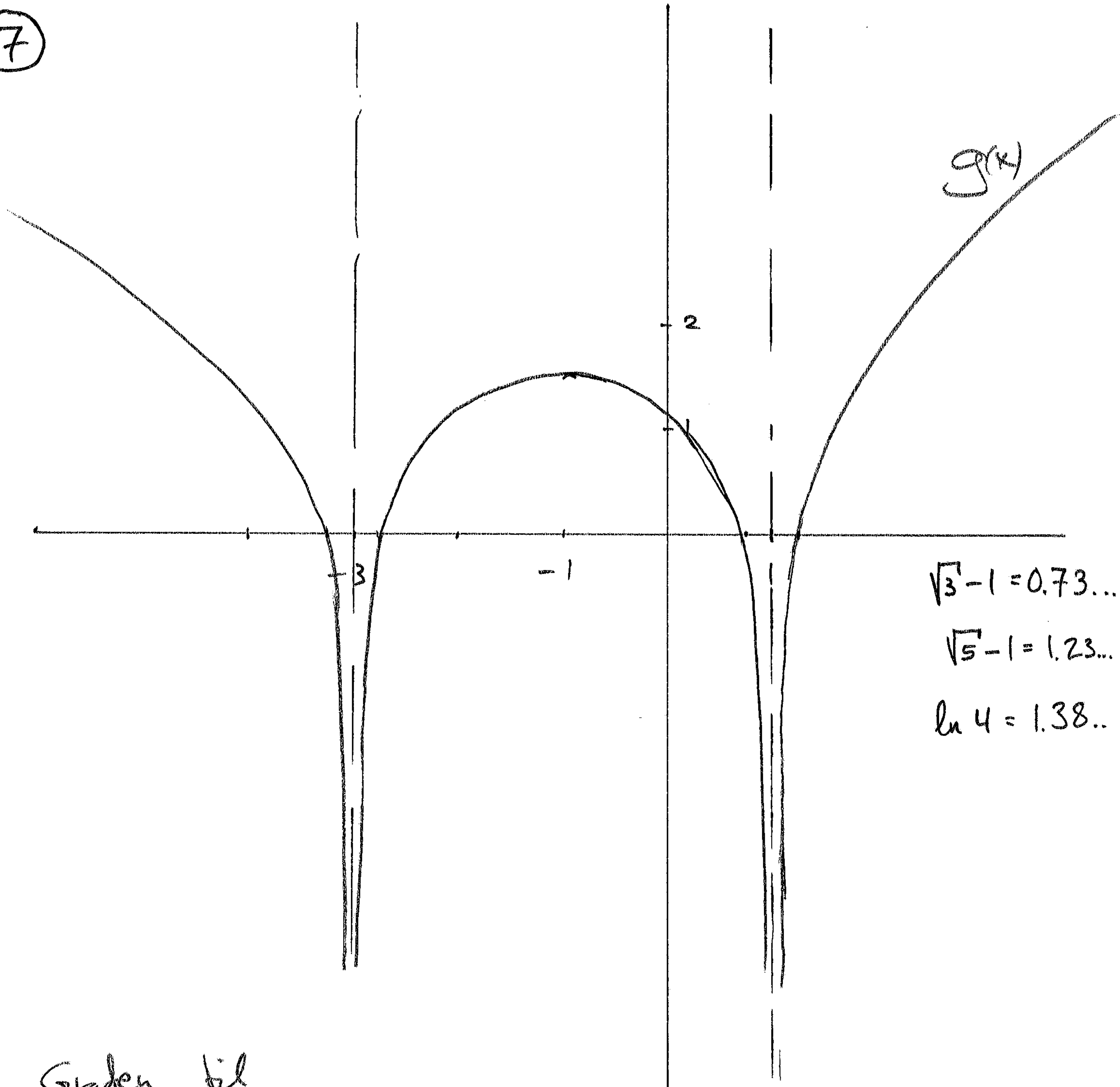
$g(x) \sim 2\ln x$ $\quad$ x veldig stor.

økende men vokser saktere enn

$a \cdot x$ for alle $a > 0$.

så $g(x)$, $f(x)$ har ingen skrå asymptoter.

7



Grafen til

$f(x)$ består av den delen

av grafen til $g(x)$ hvor $x > 1$

eller $x < -3$.