12.03.2012

18.1 Mengdelære.

En <u>mengde</u> er en samling <u>elementer</u>.

1. S mengde

x er et element i mengden S : $x \in S$

($x \notin S$ x er <u>ikke</u> et element i S)

$\emptyset$ symbolet for den tomme mengde,
mengden som har ingen elementer.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mengden av elementer
1, 2, 3, 4, 5. Rekkefølgen på elementene
er uten betydning. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

$T = \{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3\}, \emptyset \}$

Dette er en mengde av mengder.

$2 \notin T$ men $\{1, 2\} \in T$.

To mengder S og T er lik hvis
de inneholder de samme elementene.

"Ikke alt kan være en mengde":

Russells paradoks:

"Mengden av alle mengder som
ikke inneholder seg selv"

Dette gir selvmotsigelse.

Delmengder: $A \subset B$

2

A inneholdt i B

Vi sier at A er en delmengde av B

hvis alle elementer i A også er elementer i B.

$\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$

$\{1,2,3\} \not\subset \{1,2\}$ "ikke delmengd".

$\underset{3}{\ni}$ $\qquad$ $\underset{3}{\not\ni}$

$\{1,2\} \notin \{1,2,3\}$ men

$\{1,2\} \in \{1,2,\text{Kari},\{1,2\}\}$

$\{1\} \subset \{1,2\} \underset{\text{ekvivalent}}{\Leftrightarrow} \{1,2\} \supset \{1\}$.

$\{1\} \subset \{1,2\}$ men $\{1\} \notin \{1,2\}$.

To mengder S og T er like, $S = T$,

hviss og bare hviss $T \subset S$ og $S \subset T$.

$\emptyset \subset \{1,2\}$? ja $\qquad$ $\emptyset \subset S$ for alle mengder S.

Snitt av mengder.

(3) $S \cap T = T \cap S$ er mengden av alle elementer i både S og T.

$$\{1, 2, \{1,3\}\} \cap \{\text{Kari}, 2, 5\} = \{2\}$$

$S \cap T$: "snittet av S og T"

Union av mengder.

$S \cup T$ "union av S og T"

mengden av alle elementer i S, T eller begge.

$$\{1, 2, \{1,3\}\} \cup \{\text{Kari}, 2, 5\}$$

$$= \{1, 2, \{1,3\}, \text{Kari}, 5\}$$

("Symmetrisk differanse": $A \cup B \setminus A \cap B$

mengden av alle elementer som er elementer i A eller B men ikke i begge.)

Velger en grunnmengde X og ser på delmengder av X.

Komplementet av en delmengde A i X er mengden av alle elementer i X som ikke er elementer i A. Vi skriver komplementet som $X \setminus A$, $X - A$, etc.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A = \{2, 4\}$ delmengde

Komplementet til A : $X - A = \underline{\{1, 3, 5\}}$.

4

Generelt : $A \cup (X - A) = X$

$A \cap (X - A) = \emptyset$

Så A, $X - A$ er en dekomponering av X.

Delmengder av $\mathbb{R}$:

$[a, b]$: mengden av alle reelle tall x slik at $a \leq x \leq b$.

(a, b) : mengden av alle reelle tall x slik at $a < x < b$.

$(a, b]$:

$\{1, \sqrt{2}, 4\}$ mengden av 1, $\sqrt{2}$ og 4.

en komma 7

$(1, 2] \cap ((1{,}7), 5) = ((1{,}7), 2]$.

(5)

18.2 Kombinatorikk.

Tipping 3 muligheter H, U, B
for hver fotballkamp.

En tippekupong består av 12 kamper.

Hvor mange muligheter har man?

$$\overbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cdots \times 3}^{12} = 3^{12}$$

$$= (3^2)^6 = 9^6 = 531441$$

---

n ulike objekter (muligheter)
Gjør et valg blant dem k ganger.
Antall forskjellige lister (med valg)
er da

$$\overbrace{n \cdot n \cdots n}^{k} = \underline{\underline{n^k}}$$

Dette er "valg med tilbakelegging".

n forskjellige objekter kan ordnes i

6 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ forskjelle rekkefølger.

<u>Eks</u> ordning av fargene sort rød blå.

Generelt : første objektet som plasseres : n muligheter

andre objekt — : $(n-1)$ —

tredje objekt — : $(n-2)$ —

$\vdots$

n-te objekte plasseres : 1 mulighet.

Så det totale antall rekkefølger er

$$\underline{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n = n!} \quad (n \text{ fakultet})$$

Vi plukker ut k objekter fra en samling
7 med n forskjellige objekter.

Antall mulige utvalg ordnet etter rekkefølgen de er utvalg i, er:

1) $\underline{n^k}$ hvis vi gjør utvelgelse med tilbakeleggelse
2) $\underline{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}$ hvis vi gjør utvelgelse uten tilbakelegging.

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Hvis $n=k$ så er $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$
(antall mulige ordninger av n objekter)

Eksempel: Lotto.
Sju kuler trekkes ut blant 34 forskjellige kuler (nummerert 1, ..., 34).
Utvelgelsen skjer uten tilbakelegging.
De sju tallene ordnes etter størrelse
(rekkefølgen de trekkes er uten betydning).
Hvor mange forskjellige lottorekker finnes.

Antall mulige ordna utvalg uten tilbakelegging:
$34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28$
Antall mulige ordninger av de sju tallene er $7!$

Derfor er antall mulige lottorekke

8 $\dfrac{34 \cdot 33 \cdots 28}{1 \cdot 2 \cdots 7} = \dfrac{34!}{(34-7)!} \cdot \dfrac{1}{7!}$

$= \underline{\underline{5379616}}$

Antall mulige norske bilnummer:

2 bokstaver 5 tall

Det e 26 bokstaver. (Æ, Ø, Å er utelatt)
10 ulike tall.

$26 \cdot 26 \cdot 10^5 = 26^2 \cdot 10^5$

$= \underline{\underline{67{,}6 \cdot 10^6}}$

I praksis er det færre siden det er flere bokstaver som man unngår å bruke, samt at noen kombinasjone unngås.

Hvis bare 20 bokstaver brukes blir antall mulige kombinasjone

$20^2 \cdot 10^5 = \underline{40 \cdot 10^6}$.

(se wikipedia)

(9) Oppgaver.

En kortstokk har $4 \times 13 = 52$ forskjellige kort.
Hvor mange utvalg (uordnet) av 5 kort kan velges?

Vis at det finnes $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)}$ forskjellige ord av lengde n med k x-er og $n-k$ y-er.

For eksempel $n=4$, $k=2$.

XXYY, XYXY, XYYX, YXXY, YXYX, YYXX.

Bevis binomialformelen:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

Finn $(x+y)^5$ (gang ut) ved å bruke binomialformelen.