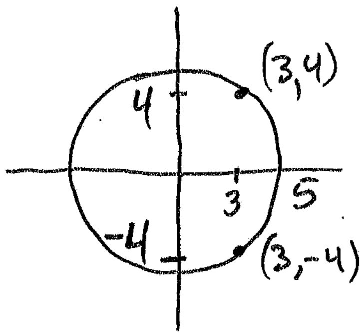
1



| | |
|---|---|
| Eksamen i | FO929A Matematikk |
| | Ordinær Eksamen |
| Dato | 2. juni 2009 |
| Tidspunkt | 09.00 - 14.00 |
| Antall oppgaver | 5 |
| Vedlegg | Formelsamling |
| Tillatte hjelpemidler | Godkjent kalkulator |

## Oppgave 1




Deriver følgende funksjoner:

a) $f(x) = 9x^3 - 14x + \sqrt{24}$

b) $f(x) = (x+1)\sin(2x)$

c) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

d) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 3}$

e) $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x+2})$

Finn likningene til følgende tangenter ved regning:

f) Tangentene i eventuelle punkter med $x = 3$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 25$.

## Oppgave 2

Vi ser på funksjonen $f(x) = (x^2 - 4x + 4) \cdot e^x$.

a) Finn eventuelle nullpunkter for $f$ ved regning. Svarene skal gis eksakt.

b) Vis at $f'(x) = x(x-2)e^x$.

c) Sett opp et fortegnsskjema for $f'(x)$, og bruk dette til å finne koordinatene til alle lokale topp- og bunnpunkter for $f$. Svarene skal gis eksakt.

d) Finn $f''(x)$ og $x$-koordinatene til eventuelle vendepunkter for $f$. Svarene skal gis eksakt. Tegn en skisse av grafen til $f$.

## Oppgave 3

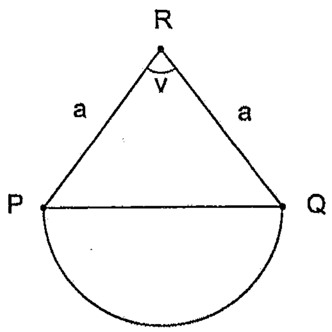
Punktene $A$, $B$, $C$ i $xyz$-koordinatsystemet har alle avstand 4 fra origo $O$. Punktet $A$ ligger på den positive $x$-aksen, punktet $B$ ligger i første kvadrant av $xy$-planet, og punktet $C$ ligger i første kvadrant av $yz$-planet. Videre er $\angle AOB = \angle BOC = 60°$.

a) Finn koordinatene til $A$, $B$ og $C$.

b) Bestem volumet av den trekantede pyramiden $OABC$.

# Oppgave 4

Et parkanlegg har form som på figuren. Den består av en likebenet trekant $\triangle PQR$ der $PR = QR = a$ og $\angle R = v$, samt en halv sirkelflate med diameter lik $PQ$.




a) Finn $PQ$ uttrykt ved $a$ og $v$.

b) Vis at arealet $A$ av anlegget kan skrives som

$$A = \frac{a^2}{4}\,(2\sin v - \pi\cos v + \pi)$$

c) La $a$ ha en fast verdi. Bestem $v$ slik at arealet blir størst mulig. Finn det største arealet når $a = 22$ meter. Oppgi arealet i nærmeste hele kvadratmeter.

# Oppgave 5

Regn ut følgende ubestemte integraler:

a) $\int (12x^3 + 4e^x - 7)\,\mathrm{d}x$

b) $\int (1/x^2 + 2/x + 3/\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x^2-5x+1}{x^2-5x-6}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x$

Løs differensiallikningen med den gitte startbetingelsen:

e) $y' \cdot (\sin x + 1) = y \cdot \cos x, \quad y(0) = 1/2$

Finn følgende areal ved regning:

f) Arealet av området begrenset av grafen til $y = \sin x + \cos x$, $x$-aksen og de to linjene $x = 0$ og $x = 3\pi/2$.

g) Arealet av området begrenset av grafen til $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$, $x$-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 1$.

Eksamen juni 2009

1\. a) 3

21 mars 2012

$$(9x^3 - 14x + \sqrt{24})'$$
$$= 9(x^3)' - 14(x)' + (\sqrt{24})'$$
$$= 9(3x^2) - 14 \cdot 1 + 0$$
$$= \underline{27x^2 - 14}$$

b)
$$((x+1)\sin(2x))' = (x+1)'\sin 2x + (x+1)(\sin(2x))'$$
$$= 1 \cdot \sin 2x + (x+1)(\cos(2x) \cdot (2x)')$$
$$= \underline{\sin(2x) + 2(x+1) \cdot \cos(2x)}.$$

c)
$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^1(x^2+1)^{1/2}}$$
$$= \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} = \left((x^2+1)^{3/2}\right)^{-1}$$
$$= (x^2+1)^{-3/2}$$
$$f'(x) = \left((x^2+1)^{-3/2}\right)' = -\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}-1} \cdot (x^2+1)'$$
$$= -3x(x^2+1)^{-5/2}$$
$$= \underline{\frac{-3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}}. = \frac{-3x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5}$$

Alternativt
$$\Bigg(\frac{1}{\underbrace{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}_{g}}\Bigg)' = \frac{(1)' \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
$$= \frac{0 \cdot g(x) - \left((x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right)'}{g^2(x)} \quad \ldots$$

(4) d) $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 3} \quad \left( = (\sin x - 1) \cdot \dfrac{1}{\cos x + 3} \right)$

Kvotientregelen

$$f'(x) = \frac{(\sin x - 1)'(\cos x + 3) - (\sin x - 1)(\cos x + 3)'}{(\cos x + 3)^2}$$

$$= \frac{\cos x(\cos x + 3) - (\sin x - 1)(-\sin x)}{(\cos x + 3)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + 3\cos x + \sin^2 x - \sin x}{(\cos x + 3)^2}$$

$$= \underline{\frac{1 + 3\cos x - \sin x}{(\cos x + 3)^2}}$$

$(\ln(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

e) $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)$

$= \ln|2x-1| - \ln|x+2|$

$(\ln|2x-1| - \ln|x+2|)'$

$$= \frac{(2x-1)'}{2x-1} - \frac{(x+2)'}{x+2}$$

$$= \underline{\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+2}}$$

$$= \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(2x-1)(x+2)} = \frac{2x+4-2x+1}{(2x-1)(x+2)}$$

$$= \underline{\frac{5}{(2x-1)(x+2)}}$$

1. f) $x^2 + y^2 = 5^2$

implisitt derivasjon

5

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(5^2) = 0$$

$$2x + \frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$ bruker kjerneregelen

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad y \neq 0$$

punktet (3,4) : $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{4}$

Tangentlinjen er $y = \frac{-3}{4}(x-3) + 4$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{9}{4} + 4$$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{25}{4}$$

$$y = \underline{\frac{1}{4}(-3x + 25)}$$

punktet (3, −4) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$

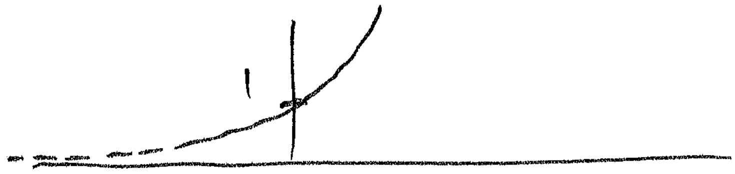
Tangentlinjen er $y = \frac{3}{4}(x-3) - 4$

2 a) $f(x) = 0$

6

$$(x^2-4x+4)e^x = 0$$

$e^x > 0$




$$(x^2-4x+4) = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

nullpunktet er $\underline{x = 2}$

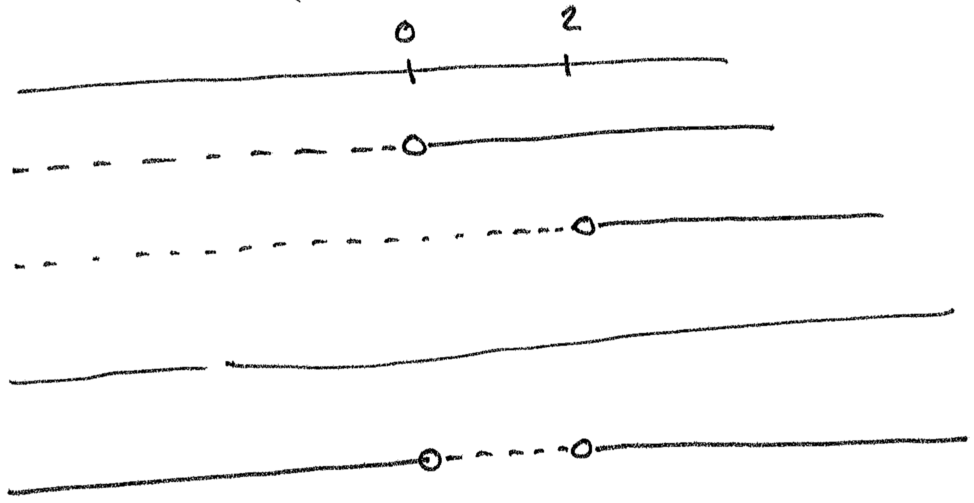
b) $f(x) = (x^2-4x+4) \cdot e^x \quad (= (x-2)^2 e^x)$ produktregel.

$$f'(x) = (x^2-4x+4)' \cdot e^x + (x^2-4x+4)e^x$$

$$= (2x-4)e^x + (x^2-4x+4)e^x$$

$$= (x^2-2x)e^x = \underline{x(x-2)e^x}.$$

c)




Lokalt toppunkt i $(0, f(0)) = (0,4)$

Lokalt bunnpunkt i $(2, f(2)) = (2,0)$

(dette er også et globalt bunnpunkt.)

2d) $f''(x) = (f'(x))'$

$= (x(x-2)\,e^x)'$ produktregelen

$= (x^2-2x)'\,e^x + (x^2-2x)(e^x)'$

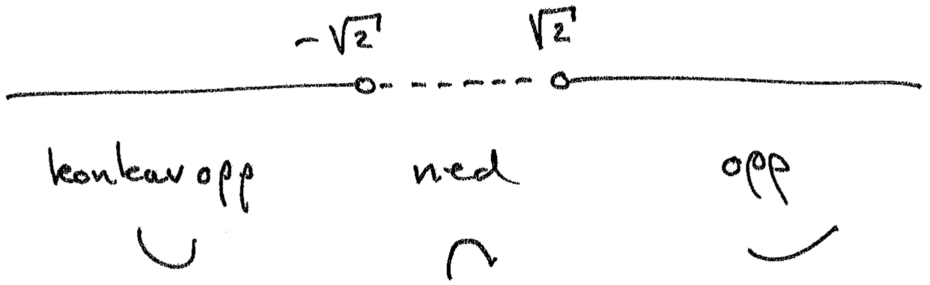
$= ((2x-2) + x^2-2x)\,e^x$

$= (x^2-2)\,e^x$

$f''(x) = 0$ når $x^2-2=0$.

Det skjer når $x=-\sqrt{2}$ eller $x=\sqrt{2}$.

Fortegn til $f''(x)$:




$f(x)$ skifter konkavitet for $x=-\sqrt{2}$ og $x=\sqrt{2}$.

Vendepunktene til $f(x)$ er:

$$(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})) = \underline{(-\sqrt{2}, (2+\sqrt{2})^2 e^{-\sqrt{2}})} \sim (-1{,}41,\ 2{,}83)$$

$$(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})) = \underline{(\sqrt{2}, (2-\sqrt{2})^2 e^{\sqrt{2}})} \sim (1{,}41,\ 1{,}41)$$

(Tallet $(2-\sqrt{2})^2 e^{\sqrt{2}} = 1.41144\ldots$ er tilfeldigvis veldig nær $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$)

8