26.04.2012

Differensiallikninger

(1) Et uttrykk som relaterer en eller flere deriverte av en funksjon $y(x)$ til $y(x)$ og x kalles en differensiallikning.

Eks

orden	
1	$y' = g(x)$
1	$y' = g(x) \cdot y$
1	$y' = x^2 + y^2$
2	$y'' + ky = 0$ harmonisk svingning
2	$y'' + ay' + y = 0$
5	$\frac{d^5 y}{dx^5} + \frac{d^3 y}{dx^3} - 3y^2 = y \cdot x$

En differensiallikning er av orden n hvis den inneholder $y^{(n)}_{(x)} = \frac{d^n}{dx^n} y$ men ikke høyere ordens deriverte (høyere enn n)

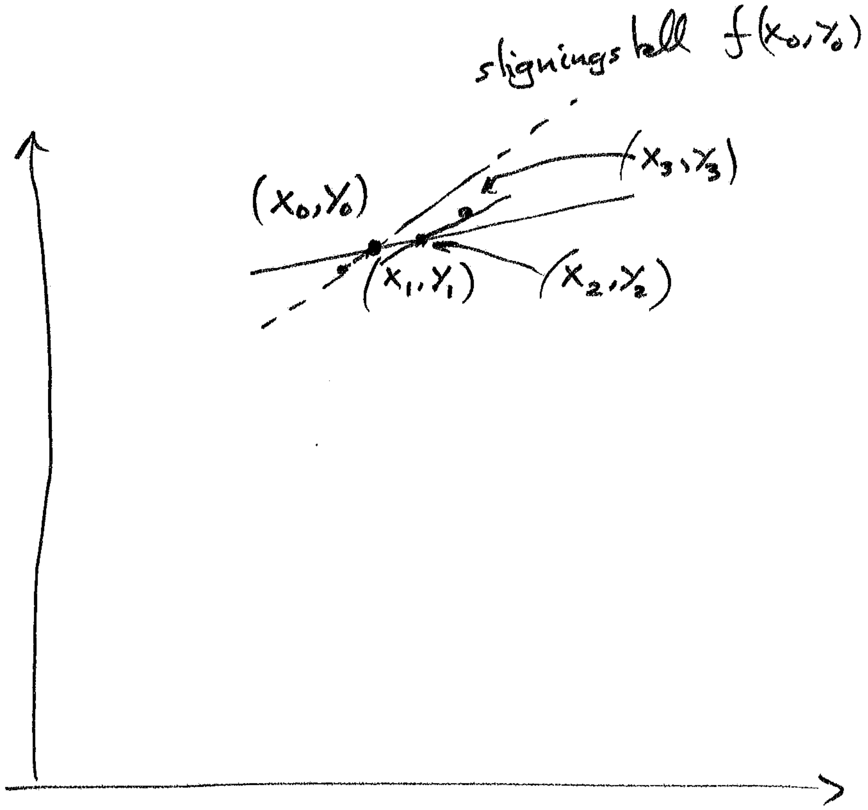
En løsning til en diff. likning er en funksjon $y(x)$ slik at diff. likninger er sann (oppfylt) for alle x (i en intervall).

Diff. likninger har typisk flere løsninger.

En n-te ordens diff. likning vil typisk ha n frihetsgrader (parametre som
2 bestemmer ulike løsninger).

Betingelser på $y(x)$ som gir en entydig løsning av en diff. likning kalles randbetingelser (initialbetingelser, startbetingelser)

En metode for å finne tilnærmet løsning til en diff. likning på formen $y' = f(x,y)$



eks Diff. likning for naturlig vekst.

③ $y' = r \cdot y$ deler med y

$$\frac{1}{y} y' = r$$ (konstant funksjon av x)

$$\int \frac{1}{y} \underbrace{y' \, dx}_{dy} = \int r \, dx$$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int r \, dx$$

$$\ln|y| = r \cdot x + c$$

$$e^{\ln|y|} = e^{rx+c}$$

$$|y| = (e^c) \cdot e^{rx}$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{rx}$$

$y = 0$ (for alle x) er også en løsning.

$$\underline{y = k \cdot e^{rx}}$$ k reelt tall

Randbetingelse: $y(0) = 2$

$y(0) = k \cdot e^0 = k = 2$

så $k = 2$

Løsningen som oppfyller $y(0) = 2$

er $\underline{y(x) = 2e^{rx}}$.

(4) Eksakt løsing av noen diff. likninger

$y' = g(x)$

Løsningene er de antideriverte funksjonene til $g(x)$

Hvis $G'(x) = g(x)$

da er løsningene på formen $G(x) + C$.

(1-parameter familie av løsninger).

Randbetingelse. $g(0) = 1$.

$G(0) + C = 1$.

så $C = 1 - G(0)$.

gir løsningen $y(x) = G(x) + 1 - G(0)$.

$y' = \sin(\pi x)$ $\quad\quad y(0) = 1$

Løsningene er $y(x) = -\dfrac{\cos(\pi x)}{\pi} + c$

Løsningen til startverdi problemet:

$y(0) = -\dfrac{\cos(0)}{\pi} + c = 1$

$= \dfrac{-1}{\pi} + c = 1$

så $c = 1 + \dfrac{1}{\pi}$.

$$y(x) = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} + \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$$

1. ordens separable diff. likninger er på formen

5

$$g(y) \cdot y' = f(x)$$

Løsninger:

$$\int g(y)\, y'\, dx = \int f(x)\, dx$$

substitusjon

$$\underline{\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx}.$$

I praksis:

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$$

flytter opp dx

$$g(y)\, dy = f(x)\, dx$$

integrerer på begge sider

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx$$

eks. $y' = \frac{-x}{y}$

6

$$y' = \frac{-x}{y}$$

$$y y' = -x$$

$$y \frac{dy}{dx} = -x$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 = -x^2 + 2c \qquad 2c = K$$

$$\underline{x^2 + y^2 = K}.$$

sirkler rundt origo med radius $\sqrt{K}$ $K \geq 0$.

eksempel (eksamen 2009 5 e))

Løs diff. likningen

(7) $$y'(\sin x + 1) = y \cdot \cos x \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x + 1}\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx$$

$U = \sin x + 1$

$$\ln|y| = \int \frac{U'}{U} dx$$

$$= \int \frac{1}{U} du = \ln|U| + c$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|U| + c} = e^{c} \cdot e^{\ln|U|}$$

$$|y| = e^{c}|U|$$

$$y = \pm e^{c} \cdot U = \pm e^{c}(\sin x + 1)$$

($y = 0$ for alle x er også en løsning)

$$y = k \cdot (\sin x + 1) \qquad k \text{ reelt tall.}$$

$$y(0) = k(\sin(0) + 1) = k = \frac{1}{2}$$

så løsningen er $\underline{y(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x)}$.