Drill - Første ordens separable differensiallikninger

Introduksjon

En differensialligning er en ligning som inneholder en ukjent funksjon $y = y(x)$, variabelen x og de deriverte y', y'', ... av funksjonen y. I motsetning til de ligningene vi har sett på til nå er løsningen av en differensialligning *ikke* ett eller flere tall, men en funksjon.

Vi skal se på såkalte første ordens separable differensialligninger. Det er ligninger som knytter sammen y, y' og x og at de kan løses med en teknikk som heter *separasjon av variablene*. I denne sammenhengen er det fordelaktig å bruke Leibnitz' skrivemåte $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Oppgaver finnes i første del nedenfor.

Når vi løser første ordens differensialligninger dukker det opp en ubestemt konstant. For å finne tallverdien av denne trenger vi informasjon om verdien av den ukjente funksjonen i et punkt $x = x_0$. Vi må med andre ord kjenne tallverdien $y(x_0) = y_0$. En differensialligning sammen med informasjonen $y(x_0) = y_0$ kalles et startverdiproblem. Oppgaver finnes i andre del nedenfor.

Løsning av separable differensialligninger

Eksempel

Jeg viser to eksempler; ett som bare inneholder y og y' og ett som i også inneholder variabelen x.

a) Vi ser på ligningen

$$y' = \lambda y, \qquad \text{for en konstant } \lambda$$

som blant annet styrer radioaktiv nedbrytning og celledeling. Vi innfører $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Deretter separerer vi variablene x og y ved å gange hele ligningen med $\frac{\mathrm{d}x}{y}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda y \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \lambda\,\mathrm{d}x.$$

Denne ligningen er separert fordi alt med y er på venstre side og alt med x er på høyre side. Vi tar nå integralet på begge sider av ligningen. Legg merke til at vi slår de to integrasjonskonstantene sammen til en konstant C.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \lambda\,\mathrm{d}x = \lambda \int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \lambda x + C.$$

Til slutt skal vi løse ligningen med hensyn på y. I dette tilfellet gjør vi det ved å bruke eksponentialfunksjonen på begge sider av ligningen fordi $e^{\ln|y|} = |y|$. Det gir

$$|y| = e^{\lambda x + C} = e^{\lambda x} \cdot e^{C} = K' e^{\lambda x}, \qquad \text{der konstanten } K' = e^{C} > 0.$$

Den generelle løsningen av differensialligningen

$$y' = \lambda y \quad \text{er} \quad \underline{\underline{y = K e^{\lambda x}}}.$$

der K er en vilkårlig konstant (med $|K| = K'$). Se eksemplet til andre del nedenfor for å se hvordan vi kan bestemme tallverdien til konstanten K.

b) Se på ligningen
$$y' = -2xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy^2.$$
Vi separerer ved å gange med $\frac{\mathrm{d}x}{y^2}$ og tar integralet på begge sider.
$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -2x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int -2x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = -x^2 + C.$$
Etter integrasjonen løser vi ligningen med hensyn på y
$$-\frac{1}{y} = -x^2 + C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = x^2 - C \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{x^2 - C}}}.$$

Oppgaver

a) $y' = -y^2$

b) $y' = x\sqrt{y}$

c) $y' = 2xy$

d) $2yy' = \frac{1}{x^2+1}$

e) $(x^2 + 1)y' = 2xy$

f) $y' = -y \tan x$

Løsning av startverdiproblemer

Et startverdiproblem er en differensialligning sammen med en opplysning om hvilken tallverdi løsningen $y = y(x)$ har i et gitt punkt $x = x_0$. Denne opplysningen brukes til å finne en tallverdi for konstanten i den generelle løsningen. En slik løsning kalles en spesielle løsning eller en partikulær løsning.

Eksempel

a) Se på differensialligningen
$$y' = \lambda y \quad \text{med} \quad y(0) = 5.$$
Vi fant den generelle løsningen $y = Ke^{\lambda x}$. Det gir
$$y(0) = Ke^{\lambda \cdot 0} = K \qquad (\text{siden } e^0 = 1).$$
Altså er $K = 5$ og den partikulære løsningen $\underline{\underline{y = 5e^{\lambda x}}}$.

b) Se på differensialligningen
$$y' = -2xy^2 \quad \text{med} \quad y(0) = 1.$$
Vi fant den generelle løsningen $y = \frac{1}{x^2 - C}$. Det gir
$$y(0) = \frac{1}{0^2 - C} = -\frac{1}{C} = 1.$$
Altså er $C = -1$ og den partikulære løsningen $\underline{\underline{y = \frac{1}{x^2+1}}}$.

Oppgaver

Bruk tilleggsopplysningene og finn konstanten i oppgavene fra første del.

a) $y' = -y^2$ og $y(0) = -\frac{1}{2}$

b) $y' = x\sqrt{y}$ og $y(2) = 0$

c) $y' = 2xy$ og $y(0) = -3$

d) $2yy' = \frac{1}{x^2+1}$ og $y(0) = 0$

e) $(x^2+1)y' = 2xy$ og $y(0) = 1$

f) $y' = -y \tan x$ og $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$